Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MAJORANT PAR RÉCURRENCE

4

CORRECTION

Montrons par récurrence que la suite (U_n) admet $M = 2$ comme majorant strict:

D'après le cours, la suite (U_n) est majorée par M ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant M$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n < 2$ ".

Initialisation: • $U_0 = 1 < 2$.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \sqrt{\dfrac{(1)^2}{2} + 1} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} < 2$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n < 2$

et montrons qu'alors $U_{n+1} < 2$.

Supposons: $U_n < 2$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

- (1) => $U_n < 2$ => $U_n^2 < 4$ => $\frac{U_n^2}{2} < 2$ **(a)**

- (1) => $U_n < 2$ **(b)**.

D'où, en additionnant membre à membre les inégalités **(a)** et **(b)**, nous avons:

$$\frac{U_n^2}{2} + U_n < 2 + 2 \Rightarrow \frac{U_n^2}{2} + U_n < 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{U_n^2}{2} + U_n} < 2$$

$$\Rightarrow U_{n+1} < 2.$$

Conclusion: Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n < 2$.

Ainsi: **la suite (U_n) est bien strictement majorée par $M = 2$.**