Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

MAJORANT 3

CORRECTION

1. a. Calculons U_0, U_1, U_2 et U_3:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \frac{2n+1}{3n-1}$.

Dans ces conditions:

- $U_0 = -1$
- $U_1 = \frac{3}{2}$
- $U_2 = 1 < \frac{3}{2}$
- $U_3 = \frac{7}{8} < \frac{3}{2}$.

Ainsi: $U_0 = -1$, $U_1 = \frac{3}{2}$, $U_2 = 1 < \frac{3}{2}$, $U_3 = \frac{7}{8} < \frac{3}{2}$.

1. b. Que dire a priori ?

A priori:

- la suite (U_n) semble croissante jusqu'à $n = 1$, puis décroissante au delà,

- la suite (U_n) semble majorée par $M = \frac{3}{2}$.

2. Montrons que la suite (U_n) admet $M = \frac{3}{2}$ comme majorant:

D'après le cours, la suite (U_n) est majorée par M ssi, pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant M$.

Pour tout entier naturel n, étudions la différence: $U_n - \frac{3}{2}$.

$$U_n - \frac{3}{2} = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{3}{2}\left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)$$

$$= \frac{-2,5n+2,5}{3n-1}$$

> 0, pour tout $n \in \left]\frac{1}{3};1\right[\notin \mathbb{N}$

$\leqslant 0$, pour tout $n \notin \left]\frac{1}{3};1\right[$.

En conclusion: la suite (U_n) admet bien $M = \frac{3}{2}$ comme majorant.