Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

EXPRESSION D'UNE SUITE PAR RÉCURRENCE

4

CORRECTION

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$ ".

Initialisation: • $U_0 = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^1}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = \sqrt{2 + U_0} = \sqrt{2}$.

Et: $U_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$

et montrons qu'alors $U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+2)}}\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés

Supposons: $U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

$$(1) \Rightarrow 2 + U_n = 2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$$

$$\Rightarrow 2 + U_n = 2 \times \left[1 + \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)+1}}\right)\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2 + U_n = 2 \times \left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)+1}}\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2 + U_n = 4 \times \cos^2\left(\frac{\pi}{2^{(n+2)}}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 + U_n} = 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+2)}}\right)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+2)}}\right).$$

Conclusion: pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{(n+1)}}\right)$.

Freemaths : Tous droits réservés