Spé Maths
Terminale

Raisonner par Récurrence

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

EXPRESSION D'UNE SUITE PAR RÉCURRENCE

3

CORRECTION

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2 + n - 1$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$: $U_n = n^2 + n - 1$ ".

Initialisation: • $U_0 = (0)^2 + 0 - 1 = -1$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

• $U_1 = U_0 + 2 \times 0 + 2 = -1 + 2 = 1$.

Et: $U_1 = (1)^2 + 1 - 1 = 1$.

Donc vrai au rang " 1 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n = n^2 + n - 1$

et montrons qu'alors $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1$.

$(= n^2 + 3n + 1)$

Supposons: $U_n = n^2 + n - 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

(1) $\Rightarrow$ $U_n + (2n+2) = n^2 + n - 1 + (2n+2)$

$\Rightarrow$ $U_n + 2n + 2 = n^2 + 3n + 1$

$\Rightarrow$ $U_n + 2n + 2 = (n+1)^2 + (n+1) - 1$

$\Rightarrow$ $U_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1) - 1.$

Conclusion: pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $U_n = n^2 + n - 1.$