Spé Maths
Terminale

Bernoulli & binomiale

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ATTEINDRE LA CIBLE

CORRECTION

1. Calculons la probabilité qu'il atteigne la cible au moins 4 fois:

Soit l'expérience aléatoire consistant, pour le tireur, à **tirer 10 fois avec son revolver**.

La probabilité, pour le tireur, d'**atteindre la cible est de 40%**.

Soient les événements C = " le tireur atteint la cible ", et $\overline{C}$ = " le tireur n'atteint pas la cible ".

On désigne par X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la cible est atteinte par le tireur.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 6 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: C et $\overline{C}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de C suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 10$ et $p = 40\%$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(10\,;\,40\%)$.

• Dans ces conditions, il s'agit de calculer ici: $P(X \geq 4)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k . (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Or ici: $n = 10$ et $p = 40\%$.

D'où: $P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4)$

$= 1 - P(X \leq 3)$.

$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= \binom{10}{0} (0,4)^0 . (0,6)^{10} + \binom{10}{1} (0,4)^1 . (0,6)^9$

$+ \binom{10}{2} (0,4)^2 . (0,6)^8 + \binom{10}{3} (0,4)^3 . (0,6)^7$

$= 1 \times (0,6)^{10} + 10 \times (0,4) \times (0,6)^9 + 45 \times (0,4)^2 \times (0,6)^8$

$+ 120 \times (0,4)^3 \times (0,6)^7$

$\approx 0,384$.

Donc: $P(X \geq 4) \approx 1 - 0,384 \approx 0,616$.

Ainsi, la probabilité que le tireur atteigne au moins 4 fois la cible est d'environ: 61,6%.

2. Déterminons le nombre de fois nécessaires pour que la probabilité que le tireur atteigne au moins une fois la cible soit supérieure à 0, 90:

• Soit **n** le nombre de tirs recherché.

Ici la variable aléatoire discrète X suit **une loi binomiale** de paramètres **n = n** et **p = 40%**: $X \rightsquigarrow B\,(n;\ 40\%)$.

Dans ces conditions, déterminer la probabilité pour que le tireur atteigne au moins une fois la cible revient à calculer: $P\,(X \geqslant 1)$.

$$P\,(X \geqslant 1) = 1 - P\,(X < 1)$$

$$= 1 - P\,(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{n}{0}(0,4)^0 \cdot (0,6)^n$$

$$= 1 - (0,6)^n.$$

• Pour répondre à la question, nous devons donc résoudre l'inéquation:

$$P\,(X \geqslant 1) \geqslant 0,90.$$

$$P\,(X \geqslant 1) \geqslant 0,90 \iff 1 - (0,6)^n \geqslant 0,90$$

$$\iff (0,6)^n \leqslant 0,1$$

$$\iff n \ln(0,6) \leqslant \ln(0,1)$$

$$\iff n \geqslant \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,6)}$$

cad $n \geqslant 4,507$ ou encore $n = 5$.

La probabilité que le tireur atteigne une fois la cible est supérieure à $0,90$ ssi: le nombre de tirs est supérieur ou égal à 5.