Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Freemaths : Tous droits réservés

Loi des grands nombres

09

Correction

1. Majorons la probabilité que le poids d'une noix choisie dans la production de Mme A. s'écarte de la moyenne (i.e. de son espérance 15) d'au moins 5 grammes :

Soit N la variable aléatoire égale au poids d'une noix issue de la production de Madame A.
D'après l'énoncé, cette variable aléatoire a pour espérance $\mu = 15$ et pour écart-type $\sigma = 3$, donc pour variance $V = \sigma^2 = 3^2 = 9$.
La question posée revient à majorer la probabilité de l'évènement « $|N - 15| \geq 5$.

D'après le cours, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

L'écart maximal à la moyenne considéré étant égal à 5, nous pouvons appliquer à la variable aléatoire N l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 15$; $V = 9$; $\delta = 5$. Nous obtenons :

$$P(|N - 15| \geq 5) \leq \frac{9}{5^2} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

Nous en déduisons la majoration : $P(|N - 15| \geq 5) \leq 0{,}36$

La probabilité qu'une noix choisie au hasard pèse moins de 10 grammes ou bien plus de 20 grammes est inférieure ou égale à 0,36 (soit 36 %).

2. Etudions la probabilité qu'une tomate prise au hasard dans la production de M. B. pèse entre 500 et 700 grammes :

Soit T la variable aléatoire égale au poids d'une tomate issue de la production de Monsieur B.
D'après l'énoncé, cette variable aléatoire a pour espérance $\mu = 600$ et pour écart-type $\sigma = 50$, donc pour variance $V = \sigma^2 = 50^2 = 2500$. La question posée revient à étudier la probabilité de l'évènement « $|T - 600| \leq 100$ ».

D'après le cours, le corollaire de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \leq \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

Appliquons ce corollaire à la variable T avec $\mu = 600$; $V = 2500$; $\delta = 100$.

$$P(|T - 600| \leq 100) \geq 1 - \frac{2500}{100^2} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$$

Oui, nous pouvons affirmer qu'au moins les trois quarts (soit 75 %) des tomates de la production de Monsieur B. pèsent entre 500 et 700 grammes.

3. Minorons la probabilité qu'un piment choisi au hasard dans la production de M. et Mme Irigoyen soit conforme au cahier des charges :

Désignons par L la variable aléatoire égale à la longueur d'un piment choisi au hasard dans la production de M. et Mme Irigoyen. D'après l'énoncé, cette variable aléatoire a pour espérance mathématique $E(L) = 10{,}5$ et pour écart-type $\sigma(L) = 2$, donc pour variance $V(L) = (\sigma(L))^2 = 4$.

La longueur L d'un piment est conforme au cahier des charges lorsque $7 \leq L \leq 14$, autrement dit lorsque : $-3{,}5 \leq L - 10{,}5 \leq 3{,}5$ soit lorsque $|L - 10{,}5| \leq 3{,}5$.

Appliquons le corollaire de l'inégalité de Bienaymé Tchebychev évoqué à la question précédente à la variable L avec $\mu = 10{,}5$; $V = 4$; $\delta = 3{,}5$.
Nous obtenons :

$$P(|L - 10{,}5| \leq 3{,}5) \leq 1 - \frac{4}{3{,}5^2} = 1 - \frac{4}{12{,}25} = 1 - \frac{16}{49} = \frac{33}{49}$$

Freemaths : Tous droits réservés

Une calculatrice indique que $0{,}673 < \frac{33}{49} < 0{,}674$.

En conclusion :

$$P(|L - 10{,}5| < 3{,}5) > 0{,}673$$

Un minorant de la probabilité en jeu est 0,673.

La probabilité qu'un piment choisi au hasard soit conforme au cahier des charges est supérieure ou égale à 0,673 (soit 67,3 %)

NB. Dans la question 1, nous devons majorer la probabilité que la variable aléatoire s'écarte de son espérance d'AU MOINS une valeur donnée : nous appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Dans les questions 2 et 3, nous devons minorer la probabilité que la variable aléatoire s'écarte de son espérance d'AU PLUS une valeur donnée : nous appliquons son corollaire.