Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

08

Correction

Dans cet exercice, nous nous intéressons à l'appartenance de X à des intervalles dont le centre est son espérance. Nous devrons utiliser le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X-\mu| \leq \delta) \geq 1-\frac{V}{\delta^2}$$

Dans notre contexte, X a pour espérance 50 et pour variance 35.

1. Minorons la probabilité que X appartienne à l'intervalle $[40\,;60]$:

Cet intervalle $[40\,;60]$ a pour centre 50 : $X \in [40\,;60] \iff |X-50| \leq 10$.

L'évènement « $X \in [40\,;60]$ » est identique à l'évènement « $|X-50| \leq 10$ ».

Appliquons le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\mu = 50\,; V = 35\,; \delta = 10$. Nous obtenons :

$$P(|X-50| \leq 10) \geq 1-\frac{35}{10^2} = 1-0{,}35 = 0{,}65$$

La probabilité que X appartienne à l'intervalle $[40\,;60]$ est supérieure ou égale à 0,65 (soit 65 %).

2. Minorons la probabilité que l'écart entre X et son espérance ne dépasse pas 12 :

L'énoncé nous dit que l'espérance de X est égale à 50.

L'écart entre X et son espérance ne dépasse pas 12 si et seulement si $|X - 50| \leq 12$.

L'évènement en jeu est identique à l'évènement « $|X - 50| \leq 12$ ».

Appliquons le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\mu = 50$; $V = 35$; $\delta = 12$.

Nous obtenons :

$$P(|X - 50| \leq 12) \geq 1 - \frac{35}{12^2} = \frac{109}{144}$$

La probabilité que l'écart entre X et son espérance ne dépasse pas 12 est supérieure ou égale à $\frac{109}{144}$.

Une calculatrice indiquant que $0{,}75 < \frac{109}{144} < 0{,}76$, donnons un minorant décimal :

La probabilité que l'écart entre X et son espérance ne dépasse pas 12 est

supérieure ou égale à 0,75 (soit 75 %).

2. Minorons la probabilité que $36 \leq X \leq 64$:

Pour cela, utilisons le centre 50 de l'intervalle $[36 ; 64]$, qui est aussi l'espérance de X.

$36 \leq X \leq 64 \iff -14 \leq X - 50 \leq 14$ soit $|X - 50| \leq 14$.

L'évènement « $36 \leq X \leq 64$ » est identique à l'évènement « $|X - 50| \leq 14$ ».

Appliquons le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\mu = 50$; $V = 35$; $\delta = 14$.

Nous obtenons :

$$P(|X - 50| \leq 14) \geq 1 - \frac{35}{14^2} = 1 - \frac{5}{28} = \frac{23}{28}$$

La probabilité que $36 \leq X \leq 64$ est supérieure ou égale à $\frac{23}{28}$.

Une calculatrice indiquant que $0{,}82 < \frac{23}{28} < 0{,}83$, donnons un minorant décimal :

La probabilité que $36 \leq X \leq 64$ est supérieure ou égale à 0,82 (soit 82 %).