Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

07

Correction

De façon générale, soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

1. Dans le contexte de cette question, X a pour espérance 800 et pour variance 2200.

1.1. Majorons la probabilité de l'évènement « $|X-800| \geq 100$ » :

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $\mu = 800$; $V = 2200$; $\delta = 100$.

Nous obtenons :

$$P(|X-800| \geq 100) \leq \frac{2200}{100^2} = 0{,}22$$

La probabilité de l'évènement « $|X-800| \geq 100$ » est inférieure ou égale à 0,22 (soit 22 %).

1.2. Proposons un nombre entier t tel que $P(|X-800| \geq t) \leq 0{,}1$:

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $\mu = 800$; $V = 2200$; $\delta = t$. Nous obtenons :

$$P(|X-800| \geq t) \leq \frac{2200}{t^2}$$

Pour s'assurer que l'inégalité $P(|X-800| \geq t) \leq 0{,}1$ est vérifiée, il suffit de choisir un nombre positif t tel que : $\frac{2200}{t^2} \leq 0{,}1$, c'est-à-dire tel que $t^2 \geq 22000$, soit tel que $t \geq \sqrt{22000} = 20\sqrt{55}$.

L'énoncé nous impose que t soit « un nombre entier ». Nous pouvons choisir comme réponse à la question posée tout nombre entier t supérieur ou égal à $\sqrt{22000} = 20\sqrt{55}$, à notre convenance.

Une calculatrice nous indique que : $148{,}3 < \sqrt{22000} = 20\sqrt{55} < 148{,}4$.

Le plus petit nombre entier t qui vérifie l'inégalité $t^2 \geq 22000$ est l'entier : $t = 149$.

Nous pouvons affirmer :

$$P(|X - 800| \geq 149) \leq 0{,}1$$

NB. L'entier 150 est lui aussi, tout autant que 149, une réponse correcte.

2. Dans le contexte de cette question, Y a pour espérance 10 et pour variance 16.

2.1. Majorons la probabilité que Y s'écarte de son espérance au moins de 5 :

La variable Y s'écarte de son espérance d'au moins 5 si et seulement si $|Y - 10| \geq 5$.

Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable aléatoire Y avec :

$\mu = 10$; $V = 16$; $\delta = 5$. Nous obtenons :

$$P(|Y - 10| \geq 5) \leq \frac{16}{5^2} = \frac{16}{25} = 0{,}64$$

La probabilité que Y s'écarte de son espérance d'au moins 5 est inférieure ou égale à 0,64 (soit 64 %).

2.2. Majorons la probabilité que Y s'écarte de 10 au moins de 10 :

Dans notre contexte, 10 représente l'espérance de la variable aléatoire Y.

Dire que « Y s'écarte de 10 au moins de 10 » revient à dire que $|Y - 10| \geq 10$.

Appliquons à la variable aléatoire Y l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec maintenant $\delta = 10$. Nous obtenons :

$$P(|Y - 10| \geq 10) \leq \frac{16}{10^2} = \frac{16}{100} = 0{,}16$$

La probabilité que Y s'écarte de 10 d'au moins 10 est inférieure ou égale à 0,16 (soit 16 %).