Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres 06

Correction

1. Majorons la probabilité l'évènement « $|X - 6000| \geq 4000$ » :

D'après l'énoncé, la demande quotidienne X exprimée en euros est une variable aléatoire d'espérance 6000 et d'écart-type 1600, donc de variance $V = 1600^2 = 2560000$.

D'après le cours, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

Ici, nous avons affaire à la variable aléatoire X d'espérance 6000 et de variance $V = 1600^2$. Pour majorer la probabilité l'évènement « $|X - 6000| \geq 4000$ » nous pouvons appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable X avec : $\delta = 4000$. Nous obtenons :

$$P(|X - 6000| \geq 4000) \leq \frac{1600^2}{4000^2} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} = 0{,}16$$

La probabilité de l'évènement « $|X - 6000| \geq 4000$ » est inférieure ou égale à 0,16 (soit à 16 %).

2. Etudions l'évènement « le distributeur est vide en fin de journée » :

Le distributeur est vide en fin de journée si et seulement si la demande est supérieure ou égale à 10000€, c'est-à-dire si et seulement si l'évènement « $X \geq 10000$ » est réalisé.

La question précédente a montré que l'évènement « $|X - 6000| \geq 4000$ » a une probabilité inférieure ou égale à 0,16.

Or : $|X - 6000| \geq 4000 \iff \begin{cases} X - 6000 \geq 4000 \\ \text{ou bien} \\ X - 6000 \leq -4000 \end{cases}$.

L'évènement « $|X - 6000| \geq 4000$ » est la réunion de l'évènement « $X \geq 10000$ » et de l'évènement « $X \leq 2000$ » qui sont deux évènements disjoints.

Sa probabilité est la somme des probabilités de ces eux évènements disjoints. Nous pouvons écrire : $P(|X - 6000| \geq 4000\ ) = P(X \geq 10000) + P(X \leq 2000) \leq 0{,}16$.

Le nombre $P(X \leq 2000)$ étant un nombre positif, l'inégalité $P(X \geq 10000) \leq 0{,}16$ en résulte.

A fortiori, nous pouvons affirmer que $P(X \geq 10000) \leq 0{,}2$.

En revanche, nous n'avons pas d'information sur le nombre $P(X \leq 2000)$, nous ne pouvons pas conclure à propos d'une éventuelle majoration par 0,1. Le résultat 0,16 obtenu à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'est pas assez fin pour permettre une réponse positive.

En conclusion :

Oui, nous pouvons affirmer que la probabilité que le distributeur soit vide en fin de journée est inférieure à 0,2.

Non, nous ne pouvons pas affirmer que la probabilité que le distributeur soit vide en fin de journée est inférieure à 0,1.