Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

05

Correction

1. Etablissons l'équivalence des trois formulations :

Compte tenu de l'hypothèse $a < b$ et des propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$, on sait que pour tout nombre réel *x*, une et une seule des trois relations suivantes est vérifiée : ou bien $x \leq a$, ou bien $a < x < b$, ou bien $x \geq b$, selon la position relative de *x* par rapport à *a* et à *b*.

Montrons (i) $\Leftrightarrow$ (ii) :

Par définition de l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, cet ensemble est l'ensemble : $\{x \in \mathbb{R}\,;\; a < x < b\}$.Un réel *x* n'appartient pas à $]a\,;b[$si et seulement si parmi les trois inégalités possibles que nous venons de rappeler, la relation $a < x < b$ n'est pas vérifiée donc si et seulement si l'une des deux autres est vérifiée. Ainsi, (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Montrons (ii) $\Longrightarrow$ (iii) :

Le nombre $m = \frac{a+b}{2}$ est le milieu de l'intervalle $]a\,;b[$.
$b - m = b - \frac{a+b}{2} = \frac{2b-a-b}{2} = \frac{b-a}{2} = t$ et $m - a = \frac{a+b}{2} - a = \frac{a+b-2a}{2} = \frac{b-a}{2} = t.$
Le nombre *t* représente la distance entre le milieu de l'intervalle et chacune de ses extrémités.

- Si $x \leq a$, alors $x - m = x - \frac{a+b}{2} \leq a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} = -t$. Dans ce cas, $x - m$ est strictement négatif ; alors $|x - m| = m - x \geq t$.
- Si $x \geq b$, alors $x - m = x - \frac{a+b}{2} \geq b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = t$. Dans ce cas, $x - m$ est strictement positif ; alors $|x - m| = x - m \geq t$.

En conclusion, nous obtenons dans les deux cas : $|x - m| \geq t$ donc (ii) $\Longrightarrow$ (iii).

Montrons (iii) $\Longrightarrow$ (ii) :

Supposons $|x-m| \geq t$ c'est-à-dire supposons que $\left|x-\frac{a+b}{2}\right| \geq \frac{b-a}{2}$:

- Si $x-\frac{a+b}{2}$ est positif, alors $\left|x-\frac{a+b}{2}\right| = x-\frac{a+b}{2} \geq \frac{b-a}{2}$ donc $x \geq \frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2} = b$.
- Si $x-\frac{a+b}{2}$ est négatif, alors $\left|x-\frac{a+b}{2}\right| = -x+\frac{a+b}{2} \geq \frac{b-a}{2}$ donc $\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2} = a \geq x$.

Ou bien $x \geq b$, ou bien $x \leq a$ donc (iii) $\Longrightarrow$ (ii).

Nous avons démontré, successivement : (i) $\Leftrightarrow$ (ii) ; (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ; (iii) $\Longrightarrow$ (ii). Il y a ainsi équivalence entre (i) et (ii) et équivalence entre (ii) et (iii).

L'équivalence des trois formulations est établie.

2. Il s'agit de reconnaître l'extériorité à un certain intervalle. Exprimons les évènements en jeu sous la forme « $|X-m| \geq t$ » :

a. $\begin{cases} X-4 \geq 2 \\ \text{ou bien} \\ X-4 \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow |X-4| \geq 2$

L'évènement en jeu est l'évènement « $|X-4| \geq 2$ ».

b. $\begin{cases} X-20 \geq 1 \\ \text{ou bien} \\ X-20 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow |X-20| \geq 1$.

L'évènement en jeu est l'évènement « $|X-20| \geq 1$ ».

c. Nous pouvons appliquer les résultats de la première question avec :

$a = 3$; $b = 9$; $m = \frac{3+9}{2} = 6$; $t = \frac{9-3}{2} = 3$.

L'évènement en jeu est l'évènement « $|X-6| \geq 3$ ».

d. Nous pouvons appliquer les résultats de la première question avec :

$a = 1000$; $b = 1400$; $m = \frac{1000+1400}{2} = 1200$; $t = \frac{1400-1000}{2} = 200$.

L'évènement en jeu est l'évènement « $|X-1200| \geq 200$ ».

e. Géométriquement, par définition de la distance sur une droite, la distance entre X et 10 est égale à la valeur absolue de leur différence : $\text{distance}(X, 10) = |X - 10|$

Cette distance est supérieure ou égale à 2 si et seulement si $|X - 10| \geq 2$.

L'évènement en jeu est l'évènement « $|X - 10| \geq 2$ ».

3. Exprimons les contraires des évènements en jeu à l'aide d'une valeur absolue :

a. La double inégalité $-2 < X - 1 < 2$ est équivalente à : $|X - 1| < 2$.

Or, cette inégalité est satisfaite si et seulement si l'inégalité $|X - 1| \geq 2$ ne l'est pas.

L'évènement en jeu a pour contraire l'évènement « $|X - 1| \geq 2$ »

b. $1 < X < 5 \iff X \in \,]1\,;5[$. L'évènement contraire est l'évènement $X \notin \,]1\,;5[$. Nous pouvons appliquer les résultats de la question 1 avec $a = 1\,; b = 5\,; m = \frac{1+5}{2} = 3\,; t = \frac{5-1}{2} = 2$

L'évènement en jeu a pour contraire l'évènement « $|X - 3| \geq 2$ ».

c. $380 < X < 420 \iff X \in \,]380\,;420[$. L'évènement contraire est l'évènement $X \notin \,]380\,;420[$. Appliquons les résultats de la question 1 avec :

$a = 380\,; b = 420\,; m = \frac{380+420}{2} = 400\,; t = \frac{420-380}{2} = 20$

L'évènement en jeu a pour contraire l'évènement « $|X - 400| \geq 20$ ».