Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

04

Correction

1. Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer la probabilité de l'évènement : « $|X - 80| \geq 20$ »

D'après l'énoncé, le nombre X de pièces fabriquées quotidiennement par l'usine est une variable d'espérance $E(X) = 80$ et d'écart-type $\sigma(X) = 12$.

En tant que carré de l'écart-type, la variance de X est : $V(X) = \left(\sigma(X)\right)^2 = 12^2 = 144$.

D'après le cours, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

Pour majorer la probabilité l'évènement « $|X - 80| \geq 20$ », nous pouvons appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à la variable X avec : $\mu = 80$; $V = 144$; $\delta = 20$. Nous obtenons :

$$P(|X - 80| \geq 20) \leq \frac{144}{20^2} = \frac{144}{400} = \frac{9}{25} = 0{,}36$$

Le nombre 0,36 est un majorant de la probabilité de l'évènement « $|X - 80| \geq 20$ »

2. Expliquons pourquoi ce majorant est aussi un majorant de la probabilité que le nombre de pièces produites soit, un jour donné, supérieur ou égal à 100 :

L'inégalité $|X - 80| \geq 20$ équivaut à : $\begin{cases} X - 80 \geq 20 \\ \text{ou bien} \\ X - 80 \leq -20 \end{cases}$ autrement dit à $\begin{cases} X \geq 100 \\ \text{ou bien} \\ X \leq 60 \end{cases}$.

L'évènement «$|X-80| \geq 20$ » est la réunion des deux évènements « $X \geq 100$ » et « $X \leq 60$ ».

L'évènement « $X \geq 100$ » est donc inclus dans l'évènement « $|X-80| \geq 20$ ».
Donc, sa probabilité est inférieure ou égale à celle de l'évènement « $|X-80| \geq 20$ ».
Nous pouvons écrire :

$$P(X \geq 100) \leq P(|X-80| \geq 20) \leq 0{,}36$$

Le nombre 0,36 est aussi un majorant de la probabilité que le nombre de pièces produites soit, un jour donné, supérieur ou égal à 100.

En d'autres termes, la probabilité que, un jour donné, l'usine fabrique au moins 100 pièces est inférieure ou égale à 0,36 soit à 36 %.

NB. Par rapport à l'inégalité de Markov qui ne nécessite que la seule donnée de l'espérance (voir exercice 03), la connaissance de l'espérance ET de l'écart-type, puis l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, améliore significativement la qualité de la majoration.