

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

02

Correction

1. Majorons la probabilité de l'évènement « $|D - 75| \geq 25$ » à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V , alors quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

Ici, nous avons affaire à la variable aléatoire D dont nous connaissons l'espérance, égale à 75, et dont nous connaissons aussi l'écart-type, égal à 10.

Puisque, d'après l'énoncé, l'écart-type de D égal à 10, la variance V de D , en tant que carré de l'écart-type, est : $V = 10^2 = 100$.

Appliquons à la variable aléatoire D l'inégalité de Bienaymé Tchebychev en prenant $\delta = 25$:

$$P(|D - 75| \geq 25) \leq \frac{100}{25^2} = \frac{100}{625} = \frac{4}{25} = 0,16$$

Le nombre 0,16 est un majorant de la probabilité de l'évènement « $|D - 80| \geq 20$ ».

2. Expliquons pourquoi ce nombre majore la probabilité que le boulanger vende la totalité des baguettes aixoises qu'il produit :

Le boulanger vend les 100 baguettes aixoises fabriquées si et seulement si la demande du jour est supérieure ou égale à 100. L'évènement « le boulanger vend toutes ses baguettes » est le même que l'évènement « $D \geq 100$ » :

L'inégalité $|D - 75| \geq 25$ équivaut à : $\begin{cases} D - 75 \geq 25 \\ \text{ou bien} \\ D - 75 \leq -25 \end{cases}$ autrement dit à $\begin{cases} D \geq 100 \\ \text{ou bien} \\ D \leq 50 \end{cases}$.

L'évènement « $|D - 75| \geq 25$ » est la réunion des deux évènements « $D \geq 100$ » et « $D \leq 50$ ».

L'évènement « $D \geq 100$ » est donc inclus dans l'évènement « $|D - 75| \geq 25$ », sa probabilité est donc inférieure ou égale à celle de l'évènement « $|D - 75| \geq 25$ ».

Nous pouvons écrire :

$$P(D \geq 100) \leq P(|D - 75| \geq 25) \leq 0,16$$

Le nombre 0,16 est aussi un majorant de la probabilité que, un jour donné, le boulanger vende toutes ses baguettes.

En d'autres termes, la probabilité que le boulanger vende toutes ses baguettes est inférieure ou égale à 0,16 (soit à 16 %).

NB. L'inégalité de Markov (vue sur le même sujet dans l'exercice 01) présente l'avantage de ne nécessiter la connaissance que d'un seul paramètre (l'espérance) mais a l'inconvénient de fournir une majoration très grossière.

La donnée de l'écart-type et l'application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev améliore significativement la qualité de la majoration (et ceci malgré le fait que nous obtenons une majoration d'un évènement dans lequel l'évènement « $D \geq 100$ » est seulement inclus).