

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

18

Énoncé

Dans cet exercice, on se propose de démontrer l'inégalité de concentration à partir de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.

Pour i compris entre 1 et n , on note X_i des variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi de probabilité que X . La suite (X_1, X_2, \dots, X_n) de ces variables aléatoires constitue un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X .

On définit la somme de l'échantillon par : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et sa moyenne M_n par :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

1. Exprimer $E(S_n)$ en fonction de $E(X)$ et $V(S_n)$ en fonction de $V(X)$
2. Démontrer que $E(M_n) = E(X)$ et que $V(M_n) = \frac{1}{n} \times V(X)$
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev sur M_n pour démontrer l'inégalité de concentration.