Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

18

Correction

On considère dans cet exercice une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, ainsi qu'un échantillon de taille n de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi que X.

La somme de l'échantillon est : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et sa moyenne M_n est :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} = \frac{S_n}{n}$$

1. Exprimons $E(S_n)$ en fonction de $E(X)$ et $V(S_n)$ en fonction de $V(X)$:

Les variables X_i suivant la même loi que X, nous avons : $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = E(X)$ et : $V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = V(X)$

D'après le cours sur les variables aléatoires, nous savons qu'une somme de variables aléatoires a pour espérance la somme de leurs espérances.

Donc : $E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \times E(X)$

Nous savons aussi qu'une somme de variables aléatoires *indépendantes* (ce qui est le cas ici par hypothèse) a pour variance la somme de leurs variances.

Donc : $V(S_n) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n) = n \times V(X)$

2. Démontrons que $E(M_n) = E(X)$ et que $V(M_n) = \frac{1}{n} \times V(X)$:

La variable M_n est proportionnelle à S_n dans le rapport strictement positif $\frac{1}{n}$: $M_n = \frac{1}{n} \times S_n$

D'après le cours sur les variables aléatoires, nous savons que, si une variable aléatoire U a pour espérance $E(U)$ alors pour tout réel k : $E(k \times U) = k \times E(U)$

Dans notre contexte : $M_n = \frac{1}{n} \times S_n \implies E(M_n) = \frac{1}{n} \times E(S_n) = \frac{1}{n} \times \big(n \times E(X)\big) = E(X)$

Nous obtenons bien : $E(M_n) = E(X)$

Nous savons aussi que, si une variable aléatoire U a pour écart-type $\sigma(U)$, alors pour tout réel k :

$\sigma(k \times U) = |k| \times \sigma(U)$.

Dans notre contexte : $M_n = \frac{1}{n} \times S_n \implies \sigma(M_n) = \frac{1}{n} \times \sigma(S_n)$

Or, la variance d'une variable aléatoire est égale au carré de son écart-type.

$$\sigma(M_n) = \frac{1}{n} \times \sigma(S_n) \implies V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times V(S_n)$$

Il en résulte que : $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \times V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times (n\,V(X)) = \frac{1}{n} \times V(X)$

Nous obtenons bien : $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X)$

3. Démontrons l'inégalité de concentration :

D'après le cours, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit ceci : Soit U une variable aléatoire d'espérance $E(U)$ et de variance $V(U)$. Quel que soit le réel $\delta > 0$:

$$P(|U - E(U)| \geq \delta) \leq \frac{V(U)}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité à la variable M_n, dont nous connaissons l'espérance, égale à celle de X, et dont nous avons exprimé la variance : $V(M_n) = \frac{1}{n} V(X)$

Quel que soit le réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n \times \delta^2}$$

« La probabilité que la moyenne s'écarte de l'espérance d'au moins δ est majorée par $\frac{V(X)}{n \times \delta^2}$ »

Tel est un énoncé de l'inégalité de concentration.