Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

17

Correction

1. Donnons l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i :

L'épreuve consistant à choisir un élève (garçon ou non) est une épreuve à deux issues et deux seulement : c'est une épreuve de Bernoulli.

Puisqu'il y a 12 garçons parmi les 30 élèves, la probabilité de choisir un garçon est : $\frac{12}{30} = \frac{4}{10} = 0{,}4$.

La variable aléatoire X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}4$.

On sait qu'une loi de Bernoulli de paramètre p a pour espérance p et pour variance $p \times (1 - p)$.

Dans notre contexte, nous avons déterminé que $p = 0{,}4$.

X_i a pour espérance $E(X) = 0{,}4$ et pour variance $V = 0{,}4 \times (1 - 0{,}4) = 0{,}24$.

2. Déduisons-en l'espérance et la variance de la moyenne M_n :

La variable aléatoire M_n représente la fréquence du résultat « $X_i = 1$ » parmi un échantillon de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec, dans notre contexte, $p([X_i = 1]) = 0{,}4$.

D'après le cours, nous savons que dans de telles conditions, cette moyenne $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ a pour espérance $E(M_n) = p = 0{,}4$ et pour variance $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0{,}24}{n}$.

3. Cherchons une valeur de *n* assez grande pour que $P(|M_n - 0{,}4| \geq 0{,}1) \leq 0{,}05$:

D'après le cours, dans le cas où la variable aléatoire de référence suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, l'inégalité de concentration nous dit que pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\,\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité avec $p = 0{,}4$; $\delta = 0{,}1$. Nous obtenons :

$$P(|M_n - 0{,}4| \geq 0{,}1) \leq \frac{0{,}24}{n \times 0{,}1^2} = \frac{24}{n}$$

Si l'on veut que cette probabilité soit $\leq 0{,}05$, il s'agit de choisir *n* se sorte que $\frac{24}{n} \leq 0{,}05$, c'est-à-dire tel que $n \geq \frac{24}{0{,}05}$ (soit $n \geq 480$).

La valeur $n_0 = 480$ est assez grande pour que $P(|M_n - 0{,}4| \geq 0{,}1) \leq 0{,}05$.