

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

16

Énoncé

Lou et Pablo lancent simultanément deux dés identiques supposés équilibrés. Ils s'intéressent à l'événement A : « On obtient le même numéro sur les deux dés ».

Lou dit : « Les deux dés sont indiscernables, l'ordre ne compte pas, donc il y a 21 possibilités : 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-4, 3-5, 3-6, 4-5, 4-6 et 5-6 dont 6 donnent les deux mêmes numéros. Il y a donc 6 chances sur 21 soit 2 chances sur 7 pour que l'évènement A se produise. La probabilité de A est égale à $\frac{2}{7}$ ».

Pablo dit : « Bien qu'indiscernables, les deux dés sont distincts. Il y a 36 couples (x, y) possibles et équiprobables avec x et y entre 1 et 6 dont 6 donnent les deux mêmes numéros. Il y a 6 chances sur 36 donc une chance sur 6 pour que l'évènement A se produise. La probabilité de A est égale à $\frac{1}{6}$ ».

1. Qui a raison ?

Lou et Pablo décident d'un protocole pour se départager. Ils vont lancer un « assez grand nombre n de fois » les deux dés et observer le nombre S_n des occurrences de A ainsi que la fréquence $F_n = \frac{1}{n} \times S_n$ des occurrences de A . Ils souhaitent que cette fréquence observée F_n s'écarte de la probabilité théorique de A d'au plus 0,05 avec une probabilité au plus égale à 0,01.

2.1. On suppose que c'est Lou qui a raison. Préciser, sous cette hypothèse, la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par S_n . Préciser son espérance et sa variance. Justifier que, toujours sous l'hypothèse que c'est Lou qui a raison, F_n a pour espérance $\frac{2}{7}$. Exprimer sa variance en fonction de n .

2.2. Donner, à l'aide de l'inégalité de concentration, une valeur n_0 de n telle que, pour $n \geq n_0$, on ait $P\left(\left|F_n - \frac{2}{7}\right| \geq 0,05\right) \leq 0,01$.

3.1. On suppose que c'est Pablo qui a raison. Préciser, sous cette hypothèse, la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par S_n . Préciser son espérance et sa variance. Justifier que, toujours sous l'hypothèse que c'est Lou qui a raison, F_n a pour espérance $\frac{1}{6}$. Exprimer sa variance en fonction de n .

3.2. Donner, à l'aide de l'inégalité de concentration, une valeur n_0 de n telle que, pour $n \geq n_0$, on ait $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0,05\right) \leq 0,01$.

4. Dans l'incapacité de procéder à une expérimentation avec des vrais dés, Lou et Pablo ont réalisé une simulation avec Python, reproduite ci-dessous.

<pre>>>> import random as rd >>> def pablou(): s=0 for k in range(1,8201): x=rd.randint(1,6) y=rd.randint(1,6) if x==y: s=s+1 f=s/8200 return f</pre>	<pre>>>> pablou() 0.17073170731707318 >>> pablou() 0.16682926829268294 >>> pablou() 0.16560975609756098 >>> pablou() 0.17317073170731706</pre>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

4.1. Quelle valeur de n ont-ils choisie et pourquoi ?

4.2. Que représentent les instructions $x=rd.randint(1,6)$ et $y=rd.randint(1,6)$?

4.3. Que retourne l'algorithme ?

4.4. Les deux personnages, à eux deux, ont exécuté l'algorithme quatre fois. Quelle conclusion peuvent-ils tirer de l'une ou l'autre de ces exécutions (en bleu à droite sur la copie d'écran) ?