

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

15

Énoncé

Sujet de synthèse.

Les 500 élèves d'un collège prennent tous leur repas de midi à la cantine. La région envisage d'accueillir les élèves dans deux nouvelles salles de réfectoire R_1 et R_2 identiques, chacune pouvant contenir un même nombre N ($250 \leq N \leq 500$) d'élèves. Ce nombre N est à déterminer.

L'architecte chargé de la construction du réfectoire suppose que chaque élève choisira au hasard, et indépendamment des autres élèves, la salle de réfectoire où il souhaite aller. Il propose de déterminer la valeur de N de façon que la probabilité qu'un élève trouve une place libre dans la salle de réfectoire de son choix soit supérieure ou égale à 0,9.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves choisissant la salle R_1 un jour donné.

1.1. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$; $p = \frac{1}{2}$.

1.2. Déterminer l'espérance mathématique μ et la variance V de X .

2. Soit A l'évènement « tous les élèves trouvent une place libre dans la salle qu'ils ont choisie ».

2.1. Montrer que cet évènement A est l'évènement « $500 - N \leq X \leq N$ ».

2.2. Montrer que A est réalisé si et seulement si $|X - \mu| \leq N - 250$ (où μ est l'espérance de X calculée en **1.2**).

3.1. Préciser exactement quel est l'évènement contraire de l'évènement « $|X - \mu| \leq N - 250$ ».

3.2. Déterminer la plus petite valeur convenable de N donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

En déduire quelle devrait être la proposition de l'architecte à propos de la capacité des deux salles, si ce dernier s'appuie sur cette valeur de N .