Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

15

Correction

1. Etudions la variable aléatoire X égale au nombre d'élèves choisissant la salle R_1 un jour donné :

1.1. Justifions que X suit une loi binomiale :

Le choix par un élève du collège de sa salle de réfectoire est une expérience aléatoire à deux issues, « l'élève choisit la salle R_1 » ou « l'élève choisit la salle R_2 ». Ces évènements élémentaires sont équiprobables (ce que nous indique la mention « au hasard » de l'énoncé). Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli. Si nous définissons la variable aléatoire B qui vaut 1 si cet élève choisit la salle R_1 et 0 sinon, cette variable suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Si on considère l'ensemble des choix des 500 élèves, numérotés de 1 à 500, la variable aléatoire X est la somme de 500 variables aléatoires B_k indépendantes (d'après l'énoncé) et suivant toutes la même loi que B. C'est pourquoi X suit la loi binomiale $B\left(500\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

1.2. Calculons les paramètres de cette loi :

On sait que loi binomiale $B(n\,;p)$ a pour espérance mathématique np et pour variance $np(1-p)$.

Dans notre contexte, X suit la loi $B\left(500\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Son espérance est : $\mu = 500 \times \frac{1}{2} = 250$ et sa variance est : $V = 500 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 125$

2. Soit A l'évènement « tous les élèves trouvent une place libre dans la salle qu'ils ont choisie ».

2.1. Montrons que A est l'évènement « $500 - N \leq X \leq N$ » :

Lorsque X prend une certaine valeur x, il y a x élèves qui choisissent la salle R_1 et les autres élèves, donc $500 - x$ élèves, qui choisissent la salle R_2. Puisque chaque salle contient N élèves, tous les élèves peuvent s'installer dans la salle de leur choix si et seulement si : $\begin{cases} x \leq N \\ 500 - x \leq N \end{cases}$.

Or, la deuxième inégalité est équivalente à l'inégalité : $x \geq 500 - N$.

A est réalisé si et seulement si la valeur x prise par X vérifie la double inégalité : $500 - N \leq x \leq N$.

A est l'évènement : « $500 - N \leq X \leq N$ ».

2.2. Montrons que $500 - N \leq X \leq N \iff |X - \mu| \leq N - 250$:

Etant donné une inégalité, on obtient une inégalité équivalente en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres de l'inégalité.

La double inégalité $500 - N \leq X \leq N$ est équivalente à la double inégalité :

$$500 - N - 250 \leq X - 250 \leq N - 250$$

c'est-à-dire à la double inégalité :

$$-(N - 250) \leq X - 250 \leq N - 250$$

Dire qu'un nombre est situé entre un réel δ strictement positif et son opposé revient à dire que sa valeur absolue est inférieure ou égale à ce nombre δ.

A est réalisé si et seulement si $|X - 250| \leq N - 250$, soit si et seulement si $|X - \mu| \leq N - 250$ où μ désigne l'espérance mathématique de X, égale à 250.

3.1. Déterminons l'évènement contraire de l'évènement « $|X - 250| \leq N - 250$ » :

L'évènement contraire de l'évènement « $|X - 250| \leq N - 250$ » est l'évènement :

« $|X - 250| > N - 250$ ». Précisons davantage cet évènement.

Puisque X ne prend que des valeurs entières, l'inégalité stricte $|X - 250| > N - 250$ est équivalente à l'inégalité large $|X - 250| \geq N - 249$.

L'évènement contraire de l'évènement « $|X - 250| \leq N - 250$ » est exactement l'évènement : « $|X - 250| \geq N - 249$ »

3.2. Déterminons la plus petite valeur convenable de *N* donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

Considérons les deux évènements contraires l'un de l'autre précédents. La somme de leurs probabilités est égale à 1 : $P(|X-250| \leq N-250) = 1 - P(|X-250| \geq N-249)$

Chercher *N* de façon que : $P(|X-250| \leq N-250) \geq 0{,}9$ revient, par complémentarité, à chercher N de façon que : $P(|X-250| \geq N-249) \leq 0{,}1$.

Or, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si *X* est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance *V*, quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$.

Appliquons cette inégalité avec $\mu = 250$; $V = 125$; $\delta = N - 249$. Nous obtenons :

$$P(|X-250| \geq N-249) \leq \frac{125}{(N-249)^2}$$

Une condition suffisante pour garantir que $P(|X-250| \geq N-249) \leq 0{,}1$ est de choisir *N* tel que :

$$\frac{125}{(N-249)^2} \leq 0{,}1$$

soit : $1250 \leq (N-249)^2$.

Compte tenu que *N* est un entier au moins égal à 250, cette condition suffisante est équivalente à :

$$N \geq 249 + \sqrt{1250}$$

.

Une calculatrice nous indique que $35{,}3 < \sqrt{1250} < 35{,}4$, nous obtenons : $N \geq 249 + 36 = 285$.

La plus petite valeur convenable de *N* donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est la valeur : $N = 285$

L'architecte devrait proposer la construction de deux salles d'une capacité de 285 élèves chacune.