

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

14

Énoncé

Inégalité de concentration et son corollaire.

1. Une expérience E consiste à lancer un dé équilibré à six faces sur une surface plane. On désigne par X la variable aléatoire égale à 1 si le « 6 » est inscrit sur la face supérieure et égale à 0 sinon. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser son espérance μ et sa variance V .

2. Soit n un entier strictement positif. Une expérience consiste à répéter n fois, indépendamment, l'expérience E.

Pour $k = 1 ; 2 ; \dots ; n$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si, lors de l'essai numéro k , le « 6 » est inscrit sur la face supérieure, et égale à 0 sinon.

2.1. On note S_n la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ égale au nombre total de « 6 » observés lors des n répétitions.

Quelle est la loi suivie par S_n ? Préciser son espérance et sa variance.

2.2. On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence des apparitions du « 6 » observées :

$$F_n = \frac{1}{n} \times S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

Justifier que F_n a la même espérance que X et calculer sa variance.

3.1. Soit δ un réel strictement positif. À l'aide de l'inégalité de concentration, majorer en fonction de δ et de n la probabilité de l'évènement « $\left| F_n - \frac{1}{6} \right| \geq \delta$ ».

3.2. Proposer une valeur de n assez grande pour pouvoir affirmer que l'évènement $\frac{47}{300} < F_n < \frac{53}{300}$ a une probabilité supérieure ou égale à 90 %.