Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

14

Correction

1. Etudions la variable aléatoire *X* :

L'épreuve consistant à lancer un dé et à noter si le numéro apparent sur la face supérieure est un « 6 » ou non est une épreuve à deux issues et deux seulement : c'est une épreuve de Bernoulli.

Le dé étant supposé équilibré, les six faces ont la même probabilité d'apparition.

La variable aléatoire *X* suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$.

On sait qu'une loi de Bernoulli de paramètre *p* a pour espérance *p* et pour variance $p \times (1 - p)$.

Dans notre contexte, nous avons déterminé que $p = \frac{1}{6}$.

X a pour espérance $\mu = \frac{1}{6}$ et pour variance $V = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$

2.1. Etudions la variable aléatoire S_n :

L'épreuve en question consiste à répéter *n* fois indépendamment une même épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité d'un « succès » (apparition du numéro 6) est égale à $\frac{1}{6}$.

La loi suivie par S_n est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

On sait que la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ a pour espérance np et pour variance $np(1 - p)$.

L'espérance de S_n est $E(S_n) = n \times \frac{1}{6} = \frac{n}{6}$ et sa variance est $V(S_n) = n \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5n}{36}$

2.2. Etudions la variable aléatoire F_n.

Nous pouvons déduire ses paramètres de la relation : $F_n = \frac{1}{n} \times S_n$

On sait que si une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour variance V, alors pour tout réel k, la variable $k \times X$ a pour espérance $k \times \mu$ et pour variance $k^2 \times V$.

$F_n = \frac{1}{n} \times S_n$ a pour espérance $E(F_n) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{6} = \frac{1}{6}$ et pour variance $V(F_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{5n}{36} = \frac{5}{36n}$

NB. Nous pouvions également raisonner ainsi : Cette variable aléatoire F_n représente la fréquence des « Succès » parmi un échantillon de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec, dans notre contexte, $p = \frac{1}{6}$. D'après le cours, nous savons que dans de telles conditions, cette fréquence $F_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ a pour espérance $E(F_n) = p = \frac{1}{6}$ et pour variance $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{5}{36n}$. Nous serions parvenus aux mêmes résultats.

3.1. Majorons en fonction de δ et de n la probabilité de l'évènement « $\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \delta$ » :

Dans le cas où la variable aléatoire de référence suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, l'inégalité de concentration nous dit que pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|F_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\,\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité lorsque $p = \frac{1}{6}$. Nous obtenons :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{5}{36n\,\delta^2}$$

3.2. Cherchons une valeur de n « assez grande » pour que l'évènement « $\frac{47}{300} < F_n < \frac{53}{300}$ » ait une probabilité supérieure ou égale à 90 % :

Remarquons que $\frac{47}{300} = \frac{50}{300} - \frac{3}{300} = \frac{1}{6} - \frac{1}{100}$ et que : $\frac{53}{300} = \frac{50}{300} + \frac{3}{300} = \frac{1}{6} + \frac{1}{100}$

En conséquence : $\frac{47}{300} < F_n < \frac{53}{300} \Leftrightarrow -\frac{1}{100} < F_n - \frac{1}{6} < \frac{1}{100} \Leftrightarrow \left|F_n - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100} = 0{,}01$

L'évènement contraire de « $\frac{47}{300} < F_n < \frac{53}{300}$ » est exactement l'évènement « $\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01$ », type d'évènement étudié à la question précédente.

Puisque la somme des probabilités d'un évènement et de son contraire est égale à 1 : $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) = 1 - P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01\right)$

En conséquence : $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 0{,}9 \iff P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01\right) \leq 0{,}1.$

L'évènement « $\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01$ » a une probabilité au moins égale à 90 % si et seulement si son évènement contraire « $\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01$ » a une probabilité au plus égale à 10 %.

Appliquons le résultat de la question **3.1** avec $\delta = 0{,}01$:

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{5}{36n\ 0{,}1^2} = \frac{12500}{9n}$$

Les évènements « $\frac{47}{300} < F_n < \frac{53}{300}$ » et « $\left|F_n - \frac{1}{6}\right| \geq 0{,}01$ » étant des évènements contraires, la somme de leurs probabilités est égale à 1.

Pour être assuré de l'inégalité visée, à savoir $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 0{,}9$, il suffit de choisir un entier *n* tel que $\frac{12500}{9n} \leq 0{,}1$, c'est-à-dire tel que : $n \geq \frac{125000}{9}$.

Une calculatrice nous indique que $13888 < \frac{125000}{9} < 13889$

L'entier $n = 13889$ est assez grand pour pouvoir affirmer que l'évènement $\frac{47}{300} < F_{13889} < \frac{53}{300}$ a une probabilité supérieure ou égale à 0,9.

NB. Tout autre entier *n* au moins égal à 13889 convient tout autant. Rien ne nous empêche de proposer 14000 par exemple.