

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# Loi des grands nombres

13

## Énoncé

*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration.*

1. Une expérience E consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré sur une surface plane. Ses faces sont respectivement coloriées en rouge, jaune, bleu et vert.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale à 1 si la face sur laquelle se pose le dé est la face verte et à 0 sinon.

Quelle est la loi suivie par  $X$  ? Préciser son espérance et sa variance.

2. Soit  $n$  un entier strictement positif. Une expérience consiste à répéter  $n$  fois, indépendamment, l'expérience E. Pour  $k = 1 ; 2 ; \dots ; n$ , on note  $X_k$  la variable aléatoire égale à 1 si la face sur laquelle se pose le dé est la face verte, et à 0 sinon.

On note  $S_n$  la variable aléatoire  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  égale au nombre de fois où le dé s'est posé sur sa face verte lors des  $n$  répétitions.

2.1. Quelle est la loi suivie par  $S_n$  ? Préciser son espérance et sa variance.

2.2. On suppose dans cette question seulement que  $n = 200$ . Majorer la probabilité de l'évènement :  $|S_{200} - 50| \geq 10$ .

3. On note  $F_n$  la variable aléatoire égale à la fréquence des réalisations de l'évènement  $A = \ll \text{Le dé s'est posé sur sa face verte} \gg$  :

$$F_n = \frac{1}{n} \times S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

**3.1.** Justifier que  $F_n$  a pour espérance  $\frac{1}{4}$  et calculer sa variance.

**3.2.** Soit  $\delta$  un réel strictement positif. Minorer en fonction de  $\delta$  et de  $n$  la probabilité de l'évènement «  $\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq \delta$  ».

**3.3.** En déduire une minoration de la probabilité de l'évènement : «  $\left|F_{500} - \frac{1}{4}\right| \leq 0,05$  ».

**3.4.** Proposer une valeur de  $n$  assez grande pour pouvoir affirmer que l'évènement : «  $0,24 \leq F_n \leq 0,26$  » a une probabilité supérieure ou égale à 90 %.