

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Loi **G**rands **N**ombres



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

13

Énoncé

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, inégalité de concentration.

1. Une expérience E consiste à lancer un dé tétraédrique équilibré sur une surface plane. Ses faces sont respectivement coloriées en rouge, jaune, bleu et vert.

On désigne par X la variable aléatoire égale à 1 si la face sur laquelle se pose le dé est la face verte et à 0 sinon.

Quelle est la loi suivie par X ? Préciser son espérance et sa variance.

2. Soit n un entier strictement positif. Une expérience consiste à répéter n fois, indépendamment, l'expérience E. Pour $k = 1 ; 2 ; \dots ; n$, on note X_k la variable aléatoire égale à 1 si la face sur laquelle se pose le dé est la face verte, et à 0 sinon.

On note S_n la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ égale au nombre de fois où le dé s'est posé sur sa face verte lors des n répétitions.

2.1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Préciser son espérance et sa variance.

2.2. On suppose dans cette question seulement que $n = 200$. Majorer la probabilité de l'évènement : $|S_{200} - 50| \geq 10$.

3. On note F_n la variable aléatoire égale à la fréquence des réalisations de l'évènement $A = \ll \text{Le dé s'est posé sur sa face verte} \gg$:

$$F_n = \frac{1}{n} \times S_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

3.1. Justifier que F_n a pour espérance $\frac{1}{4}$ et calculer sa variance.

3.2. Soit δ un réel strictement positif. Minorer en fonction de δ et de n la probabilité de l'évènement « $\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq \delta$ ».

3.3. En déduire une minoration de la probabilité de l'évènement : « $\left|F_{500} - \frac{1}{4}\right| \leq 0,05$ ».

3.4. Proposer une valeur de n assez grande pour pouvoir affirmer que l'évènement : « $0,24 \leq F_n \leq 0,26$ » a une probabilité supérieure ou égale à 90 %.