Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

13

Correction

1. Etudions la variable aléatoire X :

L'épreuve consistant à lancer un dé tétraédrique et à noter si la face invisible est la face verte ou non est une épreuve à deux issues et deux seulement : c'est une épreuve de Bernoulli.

Le dé étant supposé équilibré, les quatre faces ont la même probabilité d'apparition.

La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{4}$.

On sait qu'une loi de Bernoulli de paramètre p a pour espérance p et pour variance $p \times (1 - p)$.

Dans notre contexte, nous avons déterminé que $p = \frac{1}{4}$.

X a pour espérance $\mu = \frac{1}{4}$ et pour variance $V = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$

2.1. Etudions la variable aléatoire S_n :

L'épreuve en question consiste à répéter n fois indépendamment une même épreuve de Bernoulli dans laquelle la probabilité d'un « succès » (dé posé sur la face verte) est égale à $\frac{1}{4}$.

La loi suivie par S_n est la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n \,;\, \frac{1}{4}\right)$.

On sait que la loi binomiale $\mathcal{B}(n \,;\, p)$ a pour espérance np et pour variance $np(1 - p)$.

L'espérance de S_n est $E(S_n) = n \times \frac{1}{4} = \frac{n}{4}$ et sa variance est $V(S_n) = n \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3n}{16}$

2.2. Majorons la probabilité de l'évènement : $|S_{200} - 50| \geq 10$:

Dans ce contexte, étant donné que $n = 200$, le nombre 50 représente l'espérance de la variable aléatoire S_{200}. Cette variable aléatoire a alors pour variance : $\frac{3 \times 200}{16} = \frac{75}{2}$. Nous pouvons ainsi majorer la probabilité en jeu à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

D'après le cours, si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité à la variable S_{200} avec $\mu = 50$; $V = \frac{75}{2}$; $\delta = 10$.

Nous obtenons :

$$P(|S_{200} - 50| \geq 10) \leq \frac{75}{2 \times 10^2} = \frac{75}{200} = 0{,}375$$

La probabilité de l'évènement « $|S_{200} - 50| \geq 10$ » est majorée par 0,375 (soit 37,5 %)

3. Etudions la variable aléatoire F_n :

3.1. Nous pouvons déduire ses paramètres de la relation : $F_n = \frac{1}{n} \times S_n$.

Nous savons que si une variable aléatoire X a pour espérance μ et pour variance V, alors pour tout réel k, la variable $k \times X$ a pour espérance $k \times \mu$ et pour variance $k^2 \times V$.

En l'occurrence : $F_n = \frac{1}{n} \times S_n$ a pour espérance $E(F_n) = \frac{1}{n} \times \frac{n}{4} = \frac{1}{4}$ (donc pour espérance la probabilité p) et pour variance $V(F_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \times \frac{3n}{16} = \frac{3}{16n}$.

NB. Nous pouvions également raisonner ainsi : Cette variable aléatoire F_n représente la fréquence des « Succès » parmi un échantillon de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ avec, dans notre contexte, $p = \frac{1}{4}$. D'après le cours, nous savons que, dans de telles conditions, cette fréquence $F_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ a pour espérance $E(F_n) = p = \frac{1}{4}$ et pour variance $V(F_n) = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{3}{16n}$. Nous serions parvenus aux mêmes résultats.

3.2. Minorons en fonction de δ et de *n* la probabilité de l'évènement « $\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq \delta$ » :

Nous cherchons à minorer la probabilité d'une intériorité à un intervalle, c'est au corollaire de l'inégalité de concentration que nous ferons appel.

Dans le cas où la variable aléatoire de référence suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, ce corollaire de l'inégalité de concentration nous dit que pour tout réel $\delta > 0$:

$$P(|F_n - p| \leq \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\,\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité lorsque $p = \frac{1}{4}$. Nous obtenons :

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq \delta\right) \leq 1 - \frac{3}{16n\,\delta^2}$$

3.3. Déduisons-en une minoration de la probabilité de l'évènement : « $\left|F_{500} - \frac{1}{4}\right| \leq 0{,}05$ ».

Appliquons l'inégalité précédente avec $n = 500$; $\delta = 0{,}05$:

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq 0{,}05\right) \geq 1 - \frac{3}{16 \times 500 \times\ 0{,}05^2} = 1 - 0{,}15 = 0{,}85$$

La probabilité de l'évènement : « $\left|F_{500} - \frac{1}{4}\right| \leq 0{,}05$ » est supérieure ou égale à 0,85 (soit 85 %)

3.4. Cherchons une valeur de *n* « assez grande » pour que l'évènement « $0{,}24 \leq F_n \leq 0{,}26$ » ait une probabilité supérieure ou égale à 90 % :

Appliquons le résultat de la question **3.1** avec $\delta = 0{,}01$:

$$P\left(\left|F_n - \frac{1}{4}\right| \leq \delta\right) \geq 1 - \frac{3}{16 \times n \times\ 0{,}01^2} = 1 - \frac{1875}{n}$$

Pour être assuré de l'inégalité visée, à savoir : $P\left(\left|F_n - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \geq 0{,}9$, il suffit de choisir un entier *n* tel que $1 - \frac{1875}{n} \geq 0{,}9$. Cette dernière inégalité est équivalente à l'inégalité $\frac{1875}{n} \leq 0{,}1$, ou aussi bien à l'inégalité : $n \geq \frac{1875}{0{,}1} = 18750$.

L'entier $n = 18750$ est assez grand pour pouvoir affirmer que l'évènement « $0{,}24 \leq F_{18750} \leq 0{,}26$ » a une probabilité au moins égale à 0,9.