Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres 12

Correction

1. Etudions la variable aléatoire S :

L'épreuve consistant à lancer 200 fois une pièce de monnaie équilibrée et à observer si la face apparente est « Pile » ou non s'apparente à un schéma de Bernoulli dans lequel la probabilité d'un « Succès » (face apparente « Pile ») est égale à $\frac{1}{2}$. Si on note S la variable aléatoire indicatrice du nombre de « Succès » obtenus, cette variable aléatoire S suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(200\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Précisons les paramètres de cette loi :

On sait que la loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$ a pour espérance np et pour variance $np(1-p)$.

L'espérance de S est $E(S) = \frac{1}{2} \times 200 = 100$ et sa variance est $V(S) = 200 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 50$.

2. Méthode 1.

$$91 \leq S \leq 109 \iff -9 \leq S - 100 \leq 9 \iff |S - 100| \leq 9$$

Or, le nombre 100 est bien l'espérance de S.

L'évènement «$91 \leq S \leq 109$ » est identique à l'évènement : « $|S - E(S)| \leq 9$ ».

Minorons la probabilité de cet évènement à l'aide du corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

D'après le cours, ce corollaire nous dit que si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, alors quel que soit le réel strictement positif δ : $P(|X - \mu| \leq \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$.

Nous devons prendre : $\mu = 100$; $V = 50$; $\delta = 9$.

Nous obtenons : $P(|S - 100| \leq 9) \geq 1 - \frac{50}{9^2} = 1 - \frac{50}{81} = \frac{31}{81}$ (soit 0,38 à 0,01 près).

Conclusion : Non, nous ne pouvons pas affirmer par cette minoration qu'il y a au moins une chance sur deux que le nombre de « Pile » obtenus est compris, au sens large, entre 91 et 109. Nous pouvons seulement affirmer que la probabilité cet évènement est supérieure ou égale à 38 %.

3. Méthode 2. Etudions l'évènement contraire :

L'évènement contraire de l'évènement « $|S - 100| \leq 9$ » est l'évènement « $|S - 100| > 9$ ».

Or, par construction, la variable S ne prend que des valeurs entières (les valeurs entières allant de 0 à 200). L'inégalité stricte $|S - 100| > 9$ est de ce fait équivalente à l'inégalité large $|S - 100| \geq 10$.

Le contraire de l'évènement « $|S - 100| \leq 9$ » est exactement l'évènement « $|S - E(S)| \geq 10$ ».

Majorons sa probabilité à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

D'après le cours, si X est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité à la variable S avec $\mu = 100$; $V = 50$; $\delta = 10$.

Nous obtenons la majoration :

$$P(|S - 100| \geq 10) \leq \frac{50}{10^2} = \frac{50}{100} = 0,5$$

La probabilité de l'évènement : $|S - 100| \geq 10$ est inférieure ou égale à 0,5.

Considérons maintenant l'évènement contraire.

Nous savons que la somme des probabilités de deux évènements contraires est égale à 1.

Par complémentarité, $P(|S - 100| \leq 9) = 1 - P(|S - 100| \geq 10) \geq 1 - 0,5 = 0,5$.

Cette probabilité est minorée par 0,5 (soit 50 %).

Conclusion : Oui, nous pouvons affirmer avec cette méthode qu'il y a au moins une chance sur deux que le nombre de « Pile » obtenus est compris, au sens large, entre 91 et 109.

4. Méthode 3.

4.1. Exprimons $P(S = k)$:

On sait que, si une variable aléatoire S suit loi binomiale $\mathcal{B}(n\ ;\ p)$, alors S prend les valeurs entières k allant de 0 à n et $P(S = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$

Ici nous avons $n = 200$; $p = 1 - p = \frac{1}{2}$. Nous obtenons :

$$P(S = k) = \binom{200}{k} \times \frac{1}{2^{200}}$$

4.2. Rétablissons l'écriture effacée :

La probabilité de l'évènement « $91 \leq S \leq 109$ » est égale à la somme $P(S = 91) + P(S = 92) + \cdots + P(S = 109)$. Nous devons effectuer la somme des probabilités $P(S = k)$ depuis la valeur 91 jusqu'à la valeur 109.

La ligne effacée est la ligne ci-contre. L'entier 91 est le premier entier pris en charge dans le « range », et l'entier 110 est le premier entier qui en est exclus.

```
for k in range(91,110):
```

L'exécution de l'algorithme nous montre que :

```
>>> calculdirect()
0.8210359604667486
```

$0{,}821 < P(91 \leq S \leq 109) < 0{,}822$

Oui, nous pouvons affirmer qu'il y a au moins une chance sur deux que le nombre de « Pile » obtenus est compris, au sens large, entre 91 et 109. La probabilité de cet évènement est voisine de 82 %.

NB. La méthode 2 est plus performante que la méthode 1 puisqu'elle parvient à une majoration plus forte et à un arbitrage plus décisif. Cela ne disqualifie pas pour autant la conclusion de la méthode 1. Ces deux méthodes sont moins performantes que la méthode 3 de calcul direct, méthode qui est décisive. Encore faut-il disposer de moyens adéquats pour mener à bien ce calcul direct.
On constate sur cet exemple le caractère rudimentaire des minorations issues de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, très en dessous de la valeur exacte de la probabilité calculée directement dans la méthode 3.