Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres II

Correction

1. Etudions la variable aléatoire X :

La variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 9\}$: elle prend les valeurs entières de 1 à 9 avec la probabilité $\frac{1}{9}$ pour chacune de ces valeurs.

Espérance de X : $\mu = \frac{1}{9} \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = \frac{45}{9} = 5$

Variance de X : $V = E((X - \mu)^2) = \frac{1}{9} \times (16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16) = \frac{60}{9} = \frac{20}{3}$

X a pour espérance 5 et pour variance $\frac{20}{3}$.

2.1. Précisons espérance et variance de S :

La répétition 300 fois de l'expérience décrite à la première question fournit un échantillon de 300 variables aléatoires indépendantes de même loi que X. Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_{300})$ la liste des résultats de ces 300 répétitions.

La variable aléatoire S est la somme : $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_{300}$

D'après le cours, on sait que la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ d'un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi qu'une variable aléatoire de référence X a pour espérance $E(S_n) = n \times \mu$, et pour variance $V(S_n) = n \times V$ où μ et V désignent l'espérance et la variance de X.

La variable aléatoire S a pour espérance $E(S) = 300 \times 5 = 1500$

et pour variance $V(S) = 300 \times \frac{20}{3} = 2000$

2.2. Minorons la probabilité que cette somme S soit comprise entre 1400 et 1600 :

L'évènement « $1400 \leq S \leq 1600$ » est aussi bien l'évènement « $-100 \leq S - 1500 \leq 100$ », c'est-à-dire l'évènement : « $|S - 1500| \leq 100$ ».

D'après le cours, le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que si *X* est une variable aléatoire d'espérance μ et de variance *V*, alors quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X-\mu| \leq \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2}$$

Nous pouvons appliquer cette inégalité à la variable *S* avec $\mu = 1500$; $V = 2000$; $\delta = 100$. Nous obtenons :

$$P(|S-1500| \leq 100) \geq 1 - \frac{2000}{100^2} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

La probabilité de l'évènement « $1400 \leq S \leq 1600$ » est supérieure ou égale à $\frac{4}{5}$ (soit à 80 %)

3. Déterminons un entier *n* convenable :

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la liste des résultats des *n* répétitions indépendantes de l'expérience décrite à la question 1 et soit $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ la moyenne des résultats obtenus.

D'après le cours, on sait que M_n a la même espérance $\mu = 5$ que *X* et pour variance $V(M_n) = \frac{V}{n}$ où $V = \frac{20}{3}$ est la variance de *X*. L'inégalité de concentration nous dit à ce propos que pour tout réel strictement positif δ :

$$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\,\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité de concentration avec : $\mu = 5$; $V = \frac{20}{3}$; $\delta = 0{,}5$.

$$P(|M_n - 5| \geq 0{,}5) \leq \frac{20}{3 \times n \times 0{,}5^2} = \frac{80}{3n}$$

Pour que $P(|M_n - 5| \geq 0{,}5) \leq 0{,}05$, il suffit de choisir *n* de sorte que : $\frac{80}{3n} \leq 0{,}05$ c'est-à-dire de sorte que $n \geq \frac{80}{3 \times 0{,}05} = \frac{1600}{3}$.

Une calculatrice nous indique que $533 < \frac{1600}{3} < 534$.

Pour que la probabilité de l'évènement « $|M_n - 5| \geq 0{,}5$ » soit inférieure ou égale à 5 %,

il suffit de choisir un entier *n* supérieur ou égal à 534.

Nous pouvons proposer $n = 534$ comme réponse à la question posée.