Spé Maths
Terminale

Loi Grands Nombres

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

Loi des grands nombres

10

Correction

Partie A : une variante de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit dans cette partie X une variable aléatoire d'espérance μ, d'écart-type σ et de variance $V = \sigma^2$.

1. Soit k un réel strictement positif. Montrons que $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{V}{(k\sigma)^2} = \frac{1}{k^2}$:

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} = \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Appliquons cette inégalité lorsque $\delta = k \times \sigma$.

Nous obtenons : $P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{V}{(k\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$.

Ainsi, pour tout réel strictement positif k :

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

2. Montrons que $P(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$:

On note que : $X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma] \iff |X - \mu| \leq k\sigma$. L'évènement «$X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ » est identique à l'évènement «$|X - \mu| \leq k\sigma$ ».

Le corollaire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev nous dit que quel que soit le réel strictement positif δ :

$$P(|X - \mu| \leq \delta) \geq 1 - \frac{V}{\delta^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\delta^2}$$

Appliquons ce corollaire lorsque $\delta = k \times \sigma$:

$$P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2\delta^2} = 1 - \frac{1}{k^2}$$

Nous obtenons bien (inégalité **A.2** pour la partie suivante) :

$$P(X \in [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]) = P(|X-\mu| \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

- L'inégalité $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ majore la probabilité que X s'écarte de son espérance d'AU MOINS k fois son écart-type.
- L'inégalité **A2** minore la probabilité que X s'écarte de son espérance d'AU PLUS k fois son écart-type.

Partie B : la « méthode du *k*-sigma »

Dans cette partie, on considère une pièce mécanique dont la longueur nominale est ℓ. Le processus de production produit des pièces dont la longueur est une variable aléatoire X de moyenne ℓ, et dont l'écart type est un certain réel strictement positif σ.

La pièce est déclarée « utilisable » si la longueur est comprise dans un intervalle appelé « intervalle de tolérance » $[\ell - \Delta\,;\ \ell + \Delta]$. On note que ce nombre Δ est une constante qui ne dépend pas de l'entreprise. En revanche, l'entreprise peut agir sur la qualité de sa production et la rigueur de ses contrôles de fabrication de façon à faire en sorte que l'écart-type soit le plus petit possible.

Suivant que l'entreprise applique l'une ou l'autre des trois méthodes, elle fait en sorte que l'écart-type des pièces issues de sa production soit égal ou bien à $\frac{\Delta}{3}$, ou mieux à $\frac{\Delta}{4}$ ou encore mieux à $\frac{\Delta}{6}$. Plus l'écart-type est petit, plus il y aura une proportion importante de pièces « utilisables ».

Méthode 3-sigma : Si l'entreprise applique la « méthode 3-sigma », une pièce métallique est déclarée « utilisable » si et seulement si l'évènement « $|X - \ell| \leq 3\sigma$ » est réalisé.

Appliquons l'inégalité **A.2** avec $\delta = 3\sigma$:

La probabilité de l'évènement « $|X - \ell| \leq 3\sigma$ » est minorée par le nombre

$$1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

(soit par 88,8 % à 0,1 % près).

Méthode 4-sigma : Si l'entreprise applique la « méthode 4-sigma », une pièce métallique est déclarée « utilisable » si et seulement si l'évènement « $|X - \ell| \leq 4\sigma$ » est réalisé.

Appliquons l'inégalité **A.2** avec $\delta = 4\sigma$:

La probabilité de l'évènement « $|X - \ell| \leq 4\sigma$ » est minorée par le nombre

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(soit par 93,75%).

Méthode 6-sigma : Si l'entreprise applique la « méthode 6-sigma », une pièce métallique est déclarée « utilisable » si et seulement si l'évènement « $|X - \ell| \leq 6\sigma$ » est réalisé.

Appliquons la propriété précédente avec $\delta = 6\sigma$:

La probabilité de l'évènement « $|X - \ell| \leq 6\sigma$ » est minorée par le nombre

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

(soit par 97,2 % à 0,1 % près)