Spé Maths
Terminale

Espérance & Variance

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

VARIABLES ALÉATOIRES X, Y ET W

CORRECTION

1. Déterminons la loi de probabilité de X:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) X sont:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

- Nous avons:
  - $P(X = 1) = \frac{1}{6}$;
  - $P(X = 2) = \frac{1}{6}$;
  - $P(X = 3) = \frac{1}{6}$;
  - $P(X = 4) = \frac{1}{6}$;
  - $P(X = 5) = \frac{1}{6}$;
  - $P(X = 6) = \frac{1}{6}$.

Notons que: $P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1.$

- La loi de probabilité de la v. a. X est donc:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. a. Déterminons la loi de probabilité de la v. a. $Y=(X-3)$:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) Y sont:

$-2\ (1-3)$, $-1\ (2-3)$, $0\ (3-3)$, $1\ (4-3)$, $2\ (5-3)$, $3\ (6-3)$.

Ainsi, $Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. Y est:

$$Y(\Omega)=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

- Nous avons:
  - $P(Y=-2)=P(X=1)=\frac{1}{6}$;
  - $P(Y=-1)=P(X=2)=\frac{1}{6}$;
  - $P(Y=0)=P(X=3)=\frac{1}{6}$;
  - $P(Y=1)=P(X=4)=\frac{1}{6}$;
  - $P(Y=2)=P(X=5)=\frac{1}{6}$;

• $P(Y=3) = P(X=6) = \frac{1}{6}$.

Notons que: $P(Y=-2) + P(Y=-1) + P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = 1$.

• La loi de probabilité de la v. a. Y est donc:

y_i	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. b. Déterminons la loi de probabilité de la v. a. $W = (X-7)^2$:

• Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) W sont:

$36 \ (1-7)^2$, $25 \ (2-7)^2$, $16 \ (3-7)^2$, $9 \ (4-7)^2$, $4 \ (5-7)^2$, $1 \ (6-7)^2$.

Ainsi, $W(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. W est:

$$W(\Omega) = \{36, 25, 16, 9, 4, 1\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

• Nous avons: • $P(W=36) = P(X=1) = \frac{1}{6}$;

• $P(W=25) = P(X=2) = \frac{1}{6}$;

• $P(W=16) = P(X=3) = \frac{1}{6}$;

• $P(W=9) = P(X=4) = \frac{1}{6}$;

• $P(W=4) = P(X=5) = \frac{1}{6}$;

• $P(W=1) = P(X=6) = \frac{1}{6}$.

Notons que: $P(W=36) + P(W=25) + P(W=16) + P(W=9) + P(W=4) + P(W=1) = 1$.

• La loi de probabilité de la v. a. W est donc:

w_i	36	25	16	9	4	1
$P(W=w_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. a. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \times x_i$.

Ici: $E(X) = \left(\frac{1}{6} \times 1\right) + \left(\frac{1}{6} \times 2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 3\right) + \left(\frac{1}{6} \times 4\right) + \left(\frac{1}{6} \times 5\right) + \left(\frac{1}{6} \times 6\right)$

$= \frac{7}{2}$.

3. b. Calculons V (X):

D'après le cours: $V(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$.

Ici: $V(X) = \left(\frac{1}{6} \times 1^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 2^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 3^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 4^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 5^2\right)$

$$+\left(\frac{1}{6}\times 6^2\right) - \left[\frac{7}{2}\right]^2 = \frac{35}{12}.$$

4. a. Déduisons-en E (Y) et V (Y):

Nous allons appliquer les propriétés du cours:

- $E(Y) = E(X-3) = E(X) - 3 = \frac{1}{2}$;

- $V(Y) = V(X-3) = V(X) = \frac{35}{12}$.

4. b. Déduisons-en E (W):

Comme précédemment, nous allons appliquer les propriétés du cours:

$$E(W) = E((X-7)^2) = E(X^2 - 14X + 49)$$

$$= E(X^2) - 14\,E(X) + 49$$

$$= (V(X) + (E(X))^2)^{*} - 14\,E(X) + 49$$

$$= \frac{91}{6}.$$

(*: d'après le cours, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.)