Spé Maths
Terminale

Espérance & Variance

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

JETONS NOIRS ET BLANCS

CORRECTION

1. **Déterminons la loi de probabilité de X:**

Préalablement, notons que:

- l'urne contient 7 jetons noirs (N),
- l'urne contient (n - 7) jetons blancs (B),
- l'urne contient au total n jetons.

Dans ces conditions:

- $P(N_1) = \frac{7}{n}$,
- $P(B_1) = \frac{n-7}{n}$,
- $P_{N_1}(N_2) = \frac{7}{n} \times \frac{6}{n-1}$
- $P_{B_1}(B_2) = \frac{n-7}{n} \times \frac{n-7-1}{n-1}$,
- $P_{B_1}(N_2) = \frac{n-7}{n} \times \frac{7}{n-1}$,
- $P_{N_1}(B_2) = \frac{7}{n} \times \frac{n-7}{n-1}$.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre de couleurs différentes obtenues lors d'un tirage.

• Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v.a.) X sont:

1, 2.

Ainsi, X (Ω) l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2\}.$$

• Nous avons: • $P(X = 1) = P_{B_1}(B_2) + P_{N_1}(N_2)$

$$= \left[\left(\frac{n-7}{n}\right) \times \left(\frac{n-8}{n-1}\right)\right] + \left[\left(\frac{7}{n}\right) \times \left(\frac{6}{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{n^2 - 15n + 98}{n(n-1)};$$

• $P(X = 2) = P_{B_1}(N_2) + P_{N_1}(B_2)$

$$= \left[\left(\frac{n-7}{n}\right) \times \left(\frac{7}{n-1}\right)\right] + \left[\left(\frac{7}{n}\right) \times \left(\frac{n-7}{n-1}\right)\right]$$

$$= \frac{28n - 196}{n(n-1)}.$$

Notons que: $P(X = 1) + P(X = 2) = 1.$

• La loi de probabilité de la v.a. X est donc:

x_i	1	2
$P(X=x_i)$	$\dfrac{n^2-15n+98}{n(n-1)}$	$\dfrac{28n-196}{n(n-1)}$

2. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\times x_i.$

Ici: $E(X)=\dfrac{(n^2-15n+98)}{n(n-1)}\times 1+\dfrac{(28n-196)}{n(n-1)}\times 2=\dfrac{n^2+13n-98}{n(n-1)}.$

3. Déduisons-en V (X):

D'après le cours: $V(X)=\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\times x_i^2-[E(X)]^2.$

Ici: $V(X)=\left(\dfrac{n^2-15n+98}{n(n-1)}\times 1^2\right)+\left(\dfrac{28n-196}{n(n-1)}\times 2^2\right)$

$$-\left[\dfrac{n^2+13n-98}{n(n-1)}\right]^2$$

$$=\left[\dfrac{n^2+97n-686}{n(n-1)}\right]-\left[\dfrac{n^2+13n-98}{n(n-1)}\right]^2.$$