

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Espérance & Variance



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

10 BB ET n BR !

CORRECTION

1. Déterminons les valeurs prises par X:

- Préalablement, notons que:
- la boîte contient 10 boules blanches (BB),
 - la boîte contient n boules rouges (BR),
 - la boîte contient donc $(n + 10)$ boules.

4 possibilités s'offrent au joueur:

- tirer une BB, puis tirer une BB (cas 1)
 - tirer une BB, puis tirer une BR (cas 2)
 - tirer une BR, puis tirer une BB (cas 3)
 - tirer une BR, puis tirer une BR (cas 4)
- Dans le cas 1, le joueur gagne: $2 + 2 = 4$ points;
 - Dans le cas 2, le joueur gagne: $2 + (-3) = -1$ point;
 - Dans le cas 3, le joueur gagne: $(-3) + 2 = -1$ point;
 - Dans le cas 4, le joueur gagne: $(-3) + (-3) = -6$ points.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X sont:

- 6 points, - 1 point, 4 points.

Et ainsi: $X(\Omega) = \{-6, -1, 4\}$.

2. Calculons l'espérance de X :

• Les différentes probabilités associées aux 4 cas sont:

• cas 1: $P_1 = \frac{10}{(n+10)} \times \frac{10}{(n+10)}$ cad $P_1 = \frac{100}{(n+10)^2}$,

• cas 2: $P_2 = \frac{10}{(n+10)} \times \frac{n}{(n+10)}$ cad $P_2 = \frac{10n}{(n+10)^2}$,

• cas 3: $P_3 = \frac{n}{(n+10)} \times \frac{10}{(n+10)}$ cad $P_3 = \frac{10n}{(n+10)^2}$,

• cas 4: $P_4 = \frac{n}{(n+10)} \times \frac{n}{(n+10)}$ cad $P_4 = \frac{n^2}{(n+10)^2}$.

• La loi de probabilité de X est donc:

| | | | |
|------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| x_i | 4 | -1 | -6 |
| $P(X=x_i)$ | $\frac{100}{(n+10)^2}$ | $\frac{20n}{(n+10)^2}$ | $\frac{n^2}{(n+10)^2}$ |

• D'après le cours: $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i$.

Ici, nous avons donc:

$$E(X) = \left(\frac{100}{(n+10)^2} \times 4 \right) + \left(\frac{20n}{(n+10)^2} \times (-1) \right) + \left(\frac{n^2}{(n+10)^2} \times (-6) \right)$$

$$= \frac{400}{(n+10)^2} - \frac{20n}{(n+10)^2} - \frac{6n^2}{(n+10)^2}$$

$$= \frac{2}{(n+10)^2} (200 - 10n - 3n^2)$$

$$= \frac{2}{(n+10)^2} \times \left[-3 \left(n - \frac{20}{3} \right) (n+10) \right]$$

($\frac{20}{3}$ et -10 racines d'après l'énoncé)

$$= \frac{-6}{(n+10)} \left(n - \frac{20}{3} \right)$$

$$= \frac{-6n + 40}{n+10}$$