

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Espérance & Variance



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

1 URNE ET 4 JETONS

CORRECTION

1. Déterminons les lois de probabilités de X et Y:

• En ce qui concerne X:

X (Ω) l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

De plus, nous avons: • $P(X=1) = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$;

$$(P(X=1 \cap Y=1) + P(X=1 \cap Y=2) + P(X=1 \cap Y=3) + P(X=1 \cap Y=4))$$

$$\bullet P(X=2) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\bullet P(X=3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\bullet P(X=4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Notons que: $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$.

• La loi de probabilité de la v. a. X est donc:

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

• En ce qui concerne Y :

$Y(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. Y est:

$$Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

De plus, nous avons: • $P(Y=1) = 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$;

$$(P(Y=1 \cap X=1) + P(Y=1 \cap X=2) + P(Y=1 \cap X=3) + P(Y=1 \cap X=4))$$

$$\bullet P(Y=2) = \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\bullet P(Y=3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\bullet P(Y=4) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 0 = \frac{1}{4}.$$

Notons que: $P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = 1$.

La loi de probabilité de la v. a. Y est donc:

y_i	1	2	3	4
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

2. Calculons $P(X \leq 3)$ et $P(Y < 4)$:

$$\bullet P(X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{4}.$$

$$\bullet P(Y < 4) = P(Y \leq 3) = P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = \frac{3}{4}.$$

3. a. Déduisons-en $E(X)$:

$$\text{D'après le cours: } E(X) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) \times x_i.$$

$$\text{Ici: } E(X) = \left(\frac{1}{4} \times 1\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 3\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4\right) = 2,5.$$

3. b. Déduisons-en $E(Y)$:

$$\text{D'après le cours: } E(Y) = \sum_{i=1}^n P(Y=y_i) \times y_i.$$

$$\text{Ici: } E(Y) = \left(\frac{1}{4} \times 1\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 3\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4\right) = 2,5.$$

4. a. Calculons $V(X)$:

$$\text{D'après le cours: } V(X) = \sum_{i=1}^n P(X=x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Ici: } V(X) &= \left(\frac{1}{4} \times 1^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 3^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4^2\right) - [2,5]^2 \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

4. b. Calculons $V(Y)$:

D'après le cours: $V(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } V(Y) &= \left(\frac{1}{4} \times 1^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 2^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 3^2\right) + \left(\frac{1}{4} \times 4^2\right) - [2,5]^2 \\ &= \frac{5}{4}. \end{aligned}$$