

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Arbres Pondérés



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA BOUTEILLE

CORRECTION

1. a. Modélisation à l'aide d'un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

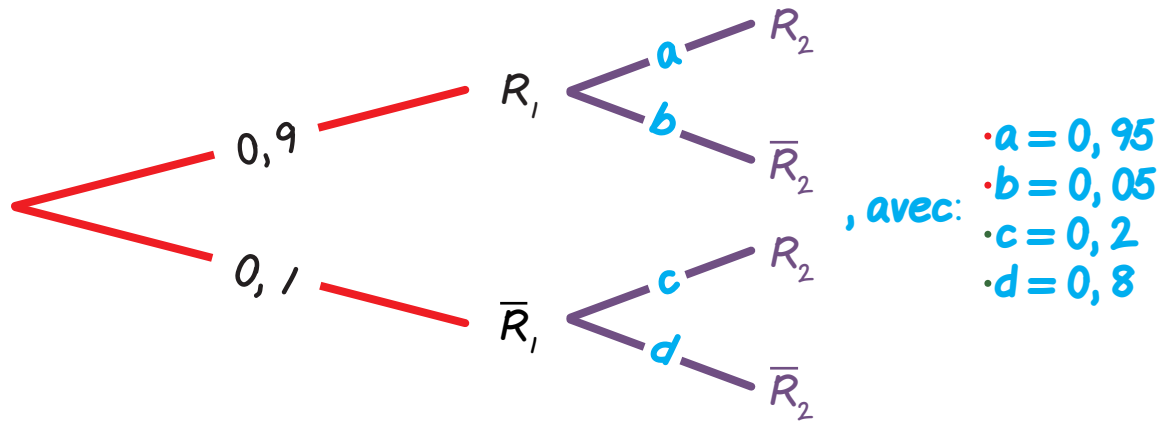
- R_1 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la 1^{ère} semaine "
- R_2 = " le client rapporte la bouteille de son panier de la 2^è semaine "

- $P(R_1) = 0,9$
- $P(\bar{R}_1) = 0,1$.

- $P_{R_1}(R_2) = 0,95$
- $P_{R_1}(\bar{R}_2) = 1 - 0,95 = 0,05$.

- $P_{\bar{R}_1}(R_2) = 0,2$
- $P_{\bar{R}_1}(\bar{R}_2) = 1 - 0,2 = 0,8$.

D'où l'arbre pondéré suivant:



1. b. Déterminons la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1^{ère} semaine et de la 2^e semaine:

Ici, il s'agit de calculer: $P(R_1 \cap R_2)$.

$$P(R_1 \cap R_2) = P_{R_1}(R_2) \times P(R_1).$$

Ainsi: $P(R_1 \cap R_2) = 0,95 \times 0,9$ cad: $P(R_1 \cap R_2) = 85,5\%$.

Au total, la probabilité que le client rapporte ses bouteilles du panier de la 1^{ère} semaine et de la 2^e semaine est de: $85,5\%$.

1. c. Montrons que la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la 2^e semaine est égale à $0,875$:

Il s'agit donc de calculer: $P(R_2)$.

$$\text{L'événement } R_2 = (R_2 \cap R_1) \cup (R_2 \cap \bar{R}_1).$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(R_2) &= P(R_2 \cap R_1) + P(R_2 \cap \bar{R}_1) \\ &= P_{R_1}(R_2) \times P(R_1) + P_{\bar{R}_1}(R_2) \times P(\bar{R}_1). \end{aligned}$$

Ainsi: $P(R_2) = 0,855 + 0,2 \times 0,1$ cad: $P(R_2) = 0,875$.

Au total, la probabilité que le client rapporte la bouteille du panier de la 2^e semaine est bien égale à: 0,875.

1. d. Calculons $P_{R_2}(\bar{R}_1)$ en arrondissant à 10^{-3} :

$$P_{R_2}(\bar{R}_1) = \frac{P(R_2 \cap \bar{R}_1)}{P(R_2)}$$

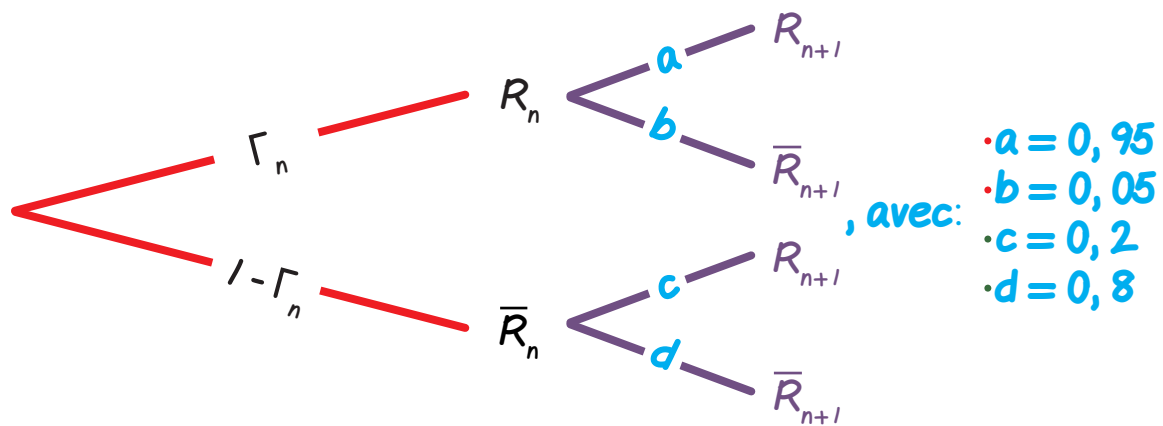
$$= \frac{P_{\bar{R}_1}(R_2) \times P(\bar{R}_1)}{P(R_2)}$$

Ainsi: $P_{R_2}(\bar{R}_1) = \frac{0,2 \times 0,1}{0,875}$ cad: $P_{R_2}(\bar{R}_1) \approx 0,023$.

Ainsi, la probabilité demandée est environ égale à: 2,3%.

2. a. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

L'arbre pondéré recopié et complété est le suivant:



2. b. Justifions que pour tout entier naturel n , $\Gamma_{n+1} = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2$:

Il s'agit donc de calculer: $P(R_{n+1})$.

L'événement $R_{n+1} = (R_{n+1} \cap R_n) \cup (R_{n+1} \cap \bar{R}_n)$.

$$\begin{aligned} \text{D'où: } P(R_{n+1}) &= P(R_{n+1} \cap R_n) + P(R_{n+1} \cap \bar{R}_n) \\ &= P_{R_n}(R_{n+1}) \times P(R_n) + P_{\bar{R}_n}(R_{n+1}) \times P(\bar{R}_n). \end{aligned}$$

Ainsi: $P(R_{n+1}) = 0,95 \times \Gamma_n + 0,2 \times (1 - \Gamma_n)$ **cad:** $P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2.$

Au total, pour tout entier naturel n , nous avons: $\Gamma_{n+1} = P(R_{n+1}) = 0,75 \cdot \Gamma_n + 0,2.$