

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrales par **IPP**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

DOUBLE INTÉGRATION PAR PARTIES

2

CORRECTION

Calculons I à l'aide d'une IPP:

Ici: $I = \int_0^{\pi} e^{-2x} \sin x \, dx.$

Soit $f(x) = e^{-2x} \sin x$. f est continue sur $[0; \pi]$. Elle admet donc des primitives sur $[0; \pi]$ et par conséquent I existe.

Ayons recours à une intégration par parties (IPP) pour le calcul de l'intégrale I .

Posons: • $u(x) = e^{-2x}$, d'où $u'(x) = -2e^{-2x}$

• $v'(x) = \sin x$, d'où $v(x) = -\cos x$.

(u et v admettent des dérivées continues sur $[0; \pi]$)

Dans ces conditions: $I = [u(x) \times v(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} v(x) \times u'(x) \, dx$

$$= [(e^{-2x}) \times (-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \times (-2e^{-2x}) \, dx$$

$$= -[e^{-2x} \cos x]_0^\pi - 2 \int_0^\pi e^{-2x} \cos x \, dx.$$

Procédons à une seconde intégration par parties pour le calcul de:

$$J = \int_0^\pi e^{-2x} \cos x \, dx.$$

Soit $g(x) = e^{-2x} \cos x$. g est continue sur $[0; \pi]$. Elle admet donc des primitives sur $[0; \pi]$ et par conséquent J existe.

Posons: • $u(x) = e^{-2x}$, d'où $u'(x) = -2e^{-2x}$

• $v'(x) = \cos x$, d'où $v(x) = \sin x$.

Dans ces conditions: $J = [(e^{-2x}) \times (\sin x)]_0^\pi - \int_0^\pi (\sin x) \times (-2e^{-2x}) \, dx$

$$= [e^{-2x} \sin x]_0^\pi + 2 \int_0^\pi e^{-2x} \sin x \, dx$$

$$= [e^{-2x} \sin x]_0^\pi + 2 \times I.$$

Par conséquent: $I = -[e^{-2x} \cos x]_0^\pi - 2([e^{-2x} \sin x]_0^\pi + 2 \times I)$

$$\Leftrightarrow 5I = -[e^{-2x} \cos x]_0^\pi - 2[e^{-2x} \sin x]_0^\pi$$

$$\Leftrightarrow 5I = 1 + e^{-2\pi}.$$

$$\text{cad: } I = \frac{1}{5}(1 + e^{-2\pi}).$$

Au total, nous avons: $I = \frac{1}{5} (1 + e^{-2\pi})$.