

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

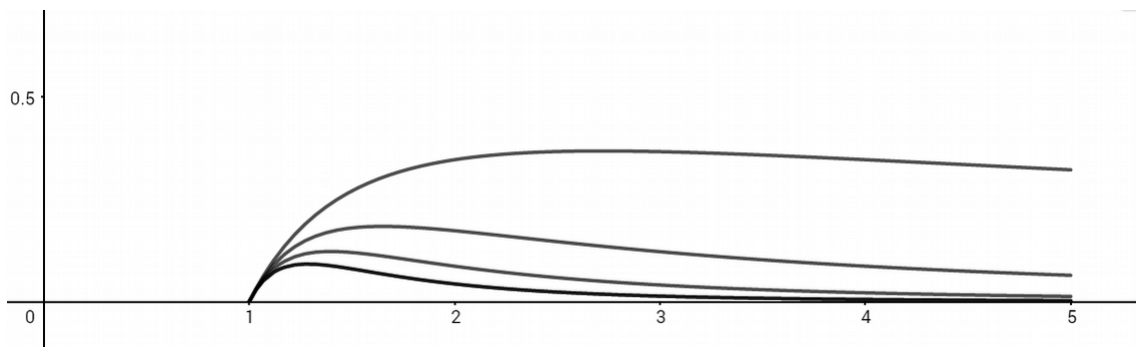
INTÉGRALES, SYNTHÈSE

On considère, pour tout entier $n > 0$, les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[1 ; 5]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n}.$$

Pour tout entier $n > 0$, on note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes \mathcal{C}_n pour n appartenant à $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.



1. Montrer que, pour tout entier $n > 0$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$:

$$f'_n(x) = \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}.$$

2. Pour tout entier $n > 0$, on admet que la fonction f_n admet un maximum sur l'intervalle $[1 ; 5]$.
On note A_n le point de la courbe \mathcal{C}_n ayant pour ordonnée ce maximum.
Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe Γ d'équation

$$y = \frac{1}{e} \ln(x).$$

- 3.a) Montrer que, pour tout entier $n > 1$ et tout réel x de l'intervalle $[1 ; 5]$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln(5)}{x^n}.$$

- b) Montrer que pour tout entier $n > 1$:

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n} dx = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{5^{n-1}} \right).$$

- c) Pour tout entier $n > 0$, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe \mathcal{C}_n , c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 1$, $x = 5$, $y = 0$ et la courbe \mathcal{C}_n .

Déterminer la valeur limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$.