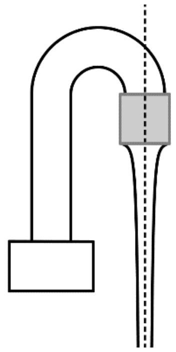
Spé Maths
Terminale

Intégrale, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE



L'écoulement de l'eau d'un robinet a un débit constant et modéré.

On s'intéresse en particulier à une partie du profil d'écoulement représentée en **annexe** par la courbe C dans un repère orthonormé.

Partie A

On considère que la courbe C donnée **en annexe** est la représentation graphique d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $]0\,;1]$ qui respecte les trois conditions suivantes :

$$\text{(H)} : f(1) = 0 \qquad f'(1) = 0{,}25 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty.$$

1. La fonction f peut-elle être une fonction polynôme du second degré ? Pourquoi ?

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $g(x) = k\ln x$.

   a. Déterminer le réel k pour que la fonction g respecte les trois conditions (H).

   b. La courbe représentative de la fonction g coïncide-t-elle avec la courbe C ? Pourquoi ?

3. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;1]$ par $h(x) = \frac{a}{x^4} + bx$ où a et b sont des réels. Déterminer a et b pour que la fonction h respecte les trois conditions (H).

Partie B

On admet dans cette partie que la courbe C est la représentation graphique d'une fonction f continue, strictement croissante, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ d'expression :

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right).$$

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet sur l'intervalle $]0\,;1]$ une unique solution qui sera notée α. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

2. On admet que le volume d'eau en cm³, contenu dans les 5 premiers centimètres de l'écoulement, est donné par la formule : $V = \int_\alpha^1 \pi\, x^2 f'(x)\mathrm{d}x$.

   a. Soit u la fonction dérivable sur $]0\,;\,1]$ définie par $u(x) = \frac{1}{2x^2}$. Déterminer sa fonction dérivée.

   b. Déterminer la valeur exacte de V. En utilisant la valeur approchée de α obtenue à la question 1, donner alors une valeur approchée de V.

ANNEXE