

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



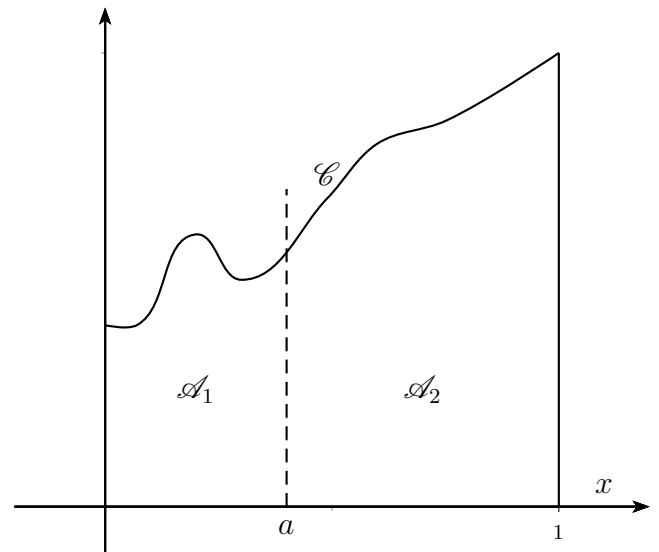
**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ , continue et positive sur cet intervalle, et  $a$  un réel tel que  $0 < a < 1$ .

On note :

- $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthogonal ;
- $\mathcal{A}_1$  l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$  d'une part, les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = a$  d'autre part.
- $\mathcal{A}_2$  l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe  $\mathcal{C}$  d'une part, les droites d'équations  $x = a$  et  $x = 1$  d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions  $f$ , une valeur du réel  $a$  vérifiant la condition (E) : « les aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel  $a$  pour chacune des fonctions considérées.

## Partie A - Étude de quelques exemples

1) Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel  $a$  et déterminer sa valeur.

a)  $f$  est une fonction constante strictement positive.

b)  $f$  est définie sur  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = x$ .

2) a) À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$ .

b) On note  $F$  une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

Démontrer que si le réel  $a$  satisfait la condition (E), alors  $F(a) = \frac{F(0) + F(1)}{2}$ .

La réciproque est-elle vraie ?

3) Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a) La fonction  $f$  est définie pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = e^x$ .

Vérifier que la condition (E) est remplie pour un unique réel  $a$  et donner sa valeur.

b) La fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ .

Vérifier que la valeur  $a = \frac{2}{5}$  convient.

## Partie B - Utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de $a$

Dans cette partie, on considère la fonction  $f$  définie pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$  par  $f(x) = 4 - 3x^2$ .

1) Démontrer que si  $a$  est un réel satisfaisant la condition (E), alors  $a$  est solution de l'équation :

$$x = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}.$$

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle  $[0 ; 1]$ . On note  $a$  cette solution.

2) On considère la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  de  $[0 ; 1]$  par  $g(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{3}{8}$  et la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = g(u_n)$ .

a) Calculer  $u_1$ .

b) Démontrer que la fonction  $g$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ .

d) Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente.

À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est  $a$ .

e) On admet que le réel  $a$  vérifie l'inégalité  $0 < a - u_{10} < 10^{-9}$ . Calculer  $u_{10}$  à  $10^{-8}$  près.