

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



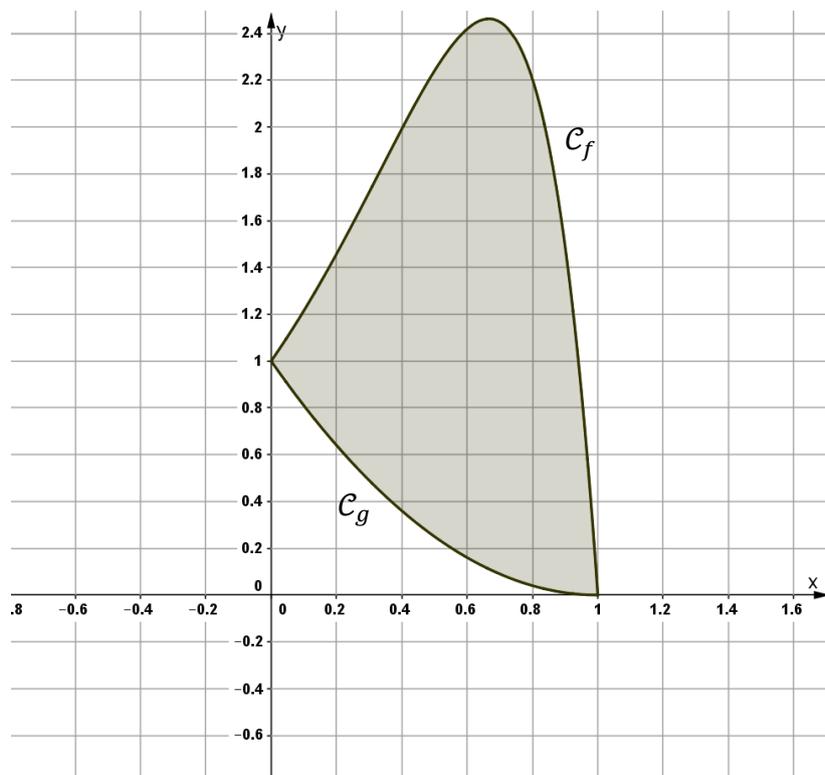
ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.

Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par : pour tout réel x de $[0 ; 1]$, $f(x) = (1 - x)e^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.

Leurs courbes représentatives seront notées respectivement \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))  
: -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)
```

```
factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))  
: exp(3x)*(-3x+2)
```

```
factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))  
: 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3xe^{3x} + 2e^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x + 2)e^{3x}$.

1. Étudier sur $[0 ; 1]$ le signe de la fonction dérivée f' , puis donner le tableau de variation de f sur $[0 ; 1]$ en précisant les valeurs utiles.
2. La courbe \mathcal{C}_f possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives $(1 ; 0)$ et $(0 ; 1)$ sont des points communs aux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .
2. On admet que : pour tout x dans $[0 ; 1]$, $f(x) - g(x) = (1 - x)(e^{3x} - 1 + x)$.
 - a. Justifier que pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{3x} - 1 \geq 0$.
 - b. En déduire que pour tout x dans $[0 ; 1]$, $e^{3x} - 1 + x \geq 0$.
 - c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0 ; 1]$.
3. a. Calculer $\int_0^1 g(x) dx$.

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{e^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S , en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.