

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



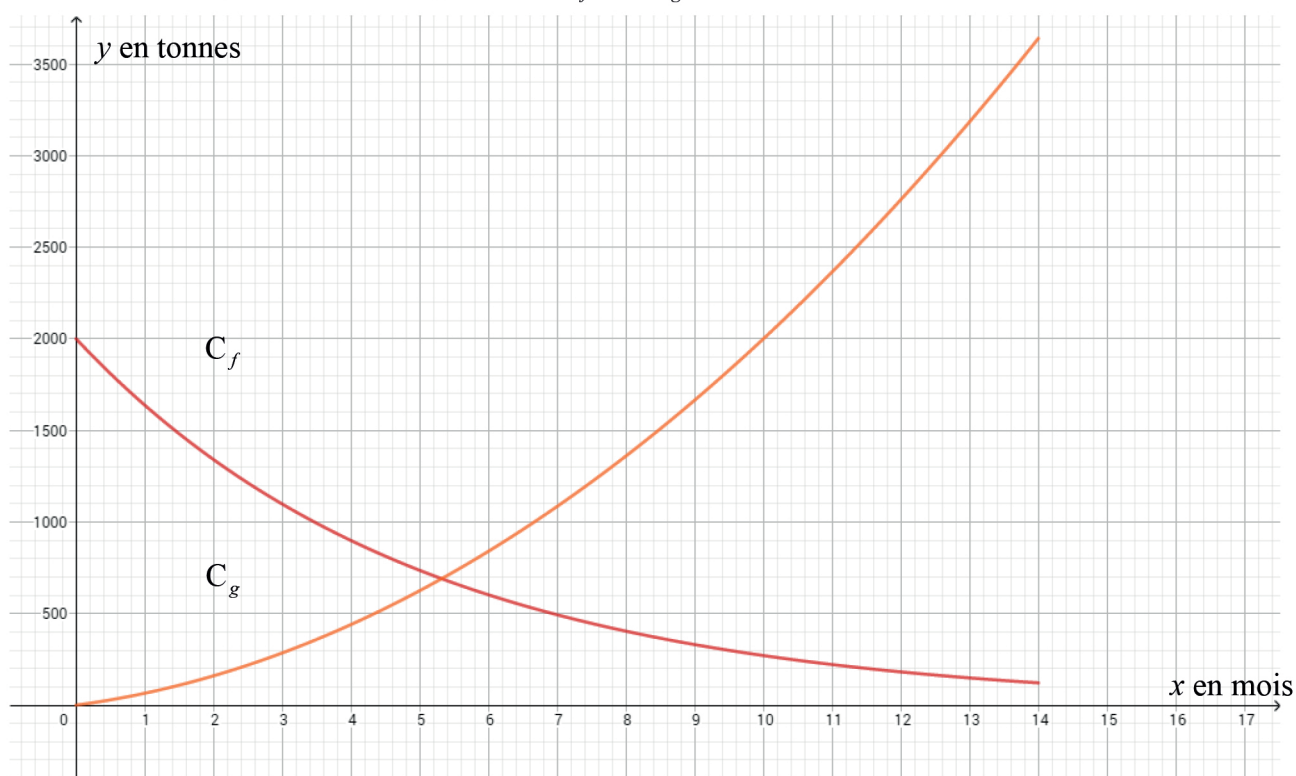
ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires. La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par :

- la fonction f définie sur $[0; 14]$ par $f(x) = 2\,000 e^{-0,2x}$ pour le produit A ;
 - la fonction g définie sur $[0; 14]$ par $g(x) = 15x^2 + 50x$ pour le produit B,
- où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.

Leurs courbes représentatives respectives C_f et C_g sont données ci-dessous.



Partie A

Par lecture graphique, sans justification et avec la précision permise par le graphique :

1. Déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.
2. L'usine ne peut pas fabriquer une quantité journalière de produit B supérieure à 3 000 tonnes.
Au bout de combien de mois cette quantité journalière sera atteinte ?

Partie B

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 14]$ on pose $h(x) = f(x) + g(x)$.

On admet que la fonction h ainsi définie est dérivable sur $[0; 14]$.

1. **a.** Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?
- b.** Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 14]$:

$$h'(x) = -400e^{-0,2x} + 30x + 50$$

2. On admet que le tableau de variation de la fonction h' sur l'intervalle $[0; 14]$ est :

x	0	14
variation de h'	-350	$h'(14) \approx 446$

- a.** Justifier que l'équation $h'(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; 14]$ et donner un encadrement d'amplitude 0,1 de α .
 - b.** En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0; 14]$.
3. Voici un algorithme :

```

Y ← -400 exp(-0,2 X) + 30 X + 50
Tant que Y ≤ 0
  X ← X + 0,1
  Y ← -400 exp(-0,2 X) + 30 X + 50
Fin Tant que
    
```

- a.** Si la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, que contient la variable X après l'exécution de cet algorithme ?
 - b.** En supposant toujours que la variable X contient la valeur 3 avant l'exécution de cet algorithme, modifier l'algorithme de façon à ce que X contienne une valeur approchée à 0,001 près de α après l'exécution de l'algorithme.
4. **a.** Vérifier qu'une primitive H de la fonction h sur $[0; 14]$ est :

$$H(x) = -10\,000e^{-0,2x} + 5x^3 + 25x^2$$
 - b.** Calculer une valeur approchée à l'unité près de $\frac{1}{12} \int_0^{12} h(x) dx$.
 - c.** Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.