

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

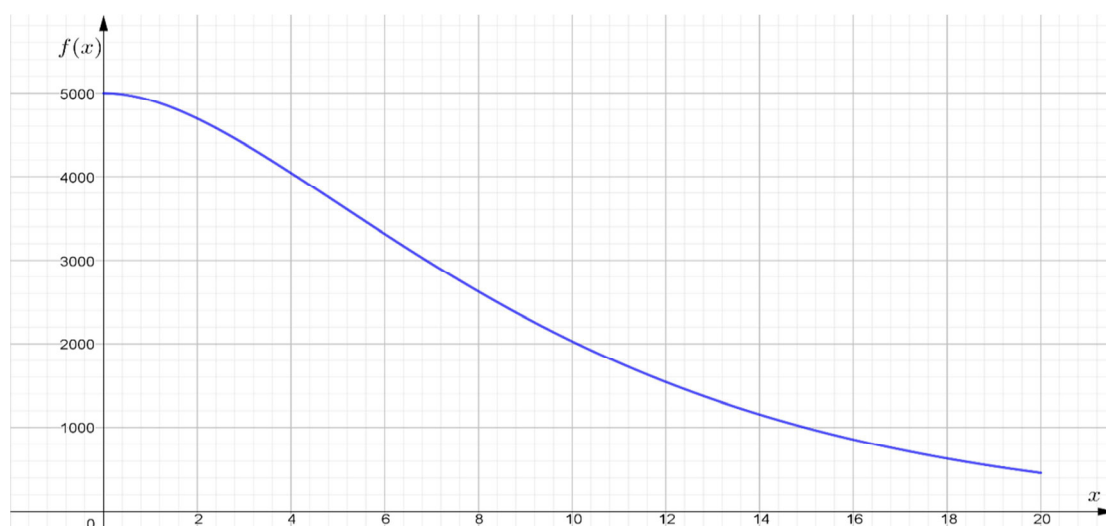
On considère la fonction dérivable f définie sur $I = [0 ; 20]$ par :

$$f(x) = 1000(x + 5)e^{-0,2x}$$

Partie A – Étude graphique

On a représenté sur le graphique ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f .

Répondre aux questions suivantes par lecture graphique.



1. Résoudre graphiquement et de façon approchée l'équation $f(x) = 3000$.
2. Donner graphiquement une valeur approchée de l'intégrale de f entre 2 et 8 à une unité d'aire près. Justifier la démarche.

Partie B – Étude théorique

1. On note f' la dérivée de la fonction f sur $[0 ; 20]$.
Démontrer que pour tout x de $[0 ; 20]$, $f'(x) = -200xe^{-0,2x}$.
2. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau des variations sur l'intervalle $[0 ; 20]$. Si nécessaire, arrondir à l'unité les valeurs présentes dans le tableau.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 3000$ admet une unique solution α sur $[0 ; 20]$, puis donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

4. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par l'expression

$$F(x) = -5000(x + 10)e^{-0,2x}$$
 est une primitive de la fonction f sur $[0 ; 20]$.

Calculer $\int_2^8 f(x) dx$. On donnera la valeur exacte, puis la valeur arrondie à l'unité.

Partie C – Application économique

La fonction de demande d'un produit est modélisée sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par la fonction f étudiée dans les parties A et B.

Le nombre $f(x)$ représente la quantité d'objets demandés lorsque le prix unitaire est égal à x euros.

Utiliser les résultats de la partie B afin de répondre aux questions suivantes :

1. En-dessous de quel prix unitaire, arrondi au centime, la demande est-elle supérieure à 3000 objets ?
2. Déterminer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 8]$. Interpréter ce résultat.