

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# Spé Maths

## Terminale

Intégrale, Synthèse



**ÉNONCÉ** DE L'EXERCICE

# INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Un ébéniste décide de refaire les accoudoirs d'un fauteuil (ébauche du fauteuil en **annexe 1**). On modélise l'accoudoir à l'aide de la fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 60]$  par :

$$f(x) = 70 + (14x + 42) e^{-\frac{x}{5}}$$

La courbe représentative de  $f$ , notée  $C_f$  est donnée en **annexe 2**.

On admet que la fonction  $f$  est deux fois dérivable sur l'intervalle  $[0 ; 60]$ . On note  $f'$  sa fonction dérivée et  $f''$  sa fonction dérivée seconde.

## Partie A

Dans toute cette partie, les réponses sont obtenues graphiquement à partir de la courbe représentative de  $f$  donnée en **annexe 2**.

On admet que le point A de  $C_f$  d'abscisse 7 est un point d'inflexion de  $C_f$ .

1. Déterminer une valeur approchée de  $f(0)$  et  $f(60)$ .
2. Déterminer  $f''(7)$ .
3. On considère la surface située entre l'axe des abscisses, la courbe  $C_f$ , et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 60$ .
  - a) Hachurer la surface décrite ci-dessus sur l'**annexe 2**.
  - b) L'ébéniste estime l'aire de cette surface à 3800 unités d'aire. Cette estimation est-elle correcte ?

## Partie B

1. Justifier que pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 60]$  on a :

$$f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}$$

2.
  - a) Étudier le signe de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $[0 ; 60]$ .
  - b) Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 60]$ .  
On arrondira à l'unité près les valeurs numériques qui apparaissent dans le tableau de variations.
3. Un logiciel de calcul formel permet d'afficher les lignes suivantes :

1	Dérivée (Dérivée $(70 + (14x + 42) e^{-\frac{x}{5}})$ )
<input type="radio"/>	$\rightarrow \frac{1}{25} (14x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x}$
2	Factoriser $\left( \frac{1}{25} (14x + 42) e^{-\frac{1}{5}x} - \frac{28}{5} e^{-\frac{1}{5}x} \right)$
<input type="radio"/>	$\rightarrow 14 e^{-\frac{1}{5}x} \cdot \frac{x - 7}{25}$

En utilisant les résultats ci-dessus, étudier la convexité de  $f$ .

4. Pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 60]$ , on pose :

$$g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

et

$$G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$$

- a) Montrer que  $G$  est une primitive de  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 60]$ .
- b) En déduire une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 60]$ .
- c) Calculer la valeur exacte de  $\int_0^{60} f(x)dx$ , puis en donner une valeur approchée à l'unité d'aire près.

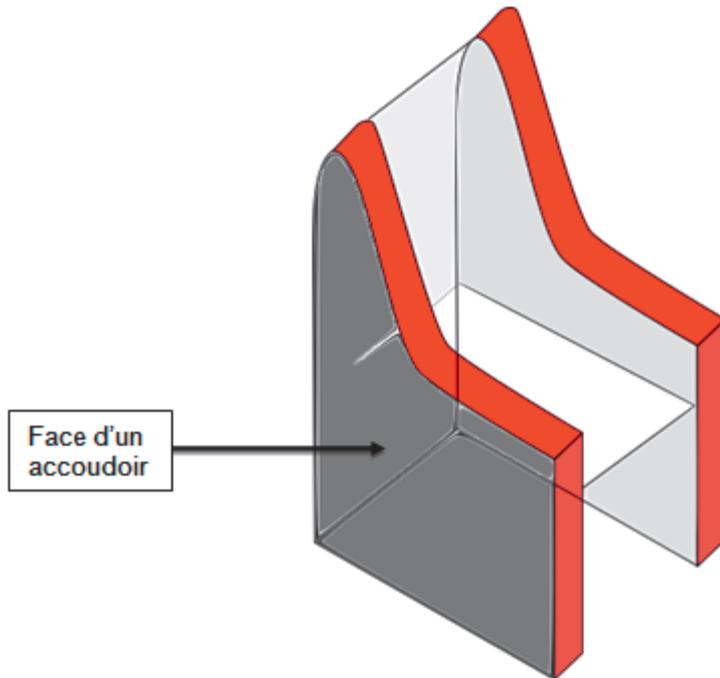
### Partie C

L'ébéniste découpe 2 accoudoirs identiques sur le modèle de la surface hachurée de l'annexe 1 en choisissant comme unité le cm.

Il souhaite vernir les deux faces de chaque accoudoir (**annexe 1**) ainsi que le dossier du fauteuil dont l'aire est égale à  $5400 \text{ cm}^2$ . Or il lui reste le quart d'un petit pot de vernis pouvant couvrir  $10 \text{ m}^2$ . Aura-t-il suffisamment de vernis ?

# ANNEXES

## Annexe 1 : ébauche du fauteuil



## Annexe 2

