

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Intégrale, Synthèse



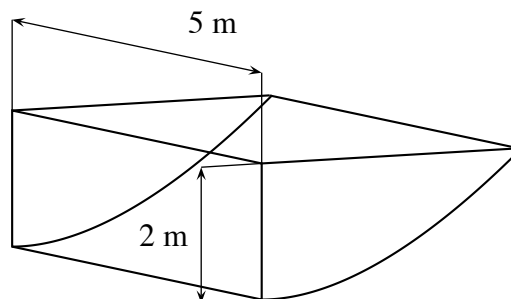
ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Un particulier veut faire fabriquer un récupérateur d'eau.

Ce récupérateur d'eau est une cuve qui doit respecter le cahier des charges suivant :

- elle doit être située à deux mètres de sa maison ;
- la profondeur maximale doit être de deux mètres ;
- elle doit mesurer cinq mètres de long ;
- elle doit épouser la pente naturelle du terrain.



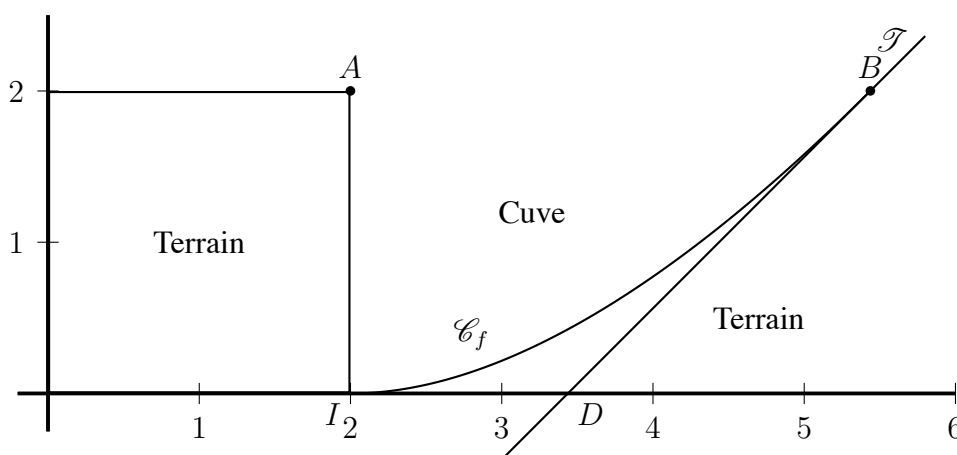
Cette cuve est schématisée ci-contre.

La partie incurvée est modélisée par la courbe \mathcal{C}_f de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$ définie par :

$$f(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - x + 2.$$

La courbe \mathcal{C}_f est représentée ci-dessous dans un repère orthonormé d'unités **1 m** et constitue une vue de profil de la cuve.

On considère les points $A(2 ; 2)$, $I(2 ; 0)$ et $B(2e ; 2)$.



Partie A

L'objectif de cette partie est d'évaluer le volume de la cuve.

1) Justifier que les points B et I appartiennent à la courbe \mathcal{C}_f et que l'axe des abscisses est tangent à la courbe \mathcal{C}_f au point I .

2) On note \mathcal{T} la tangente à la courbe \mathcal{C}_f au point B , et D le point d'intersection de la droite \mathcal{T} avec l'axe des abscisses.

a) Déterminer une équation de la droite \mathcal{T} et en déduire les coordonnées de D .

b) On appelle S l'aire du domaine délimité par la courbe \mathcal{C}_f , les droites d'équations $y = 2$, $x = 2$ et $x = 2e$.

S peut être encadrée par l'aire du triangle ABI et celle du trapèze $AIDB$.

Quel encadrement du volume de la cuve peut-on en déduire ?

3) a) Montrer que, sur l'intervalle $[2 ; 2e]$, la fonction G définie par

$$G(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4}$$

est une primitive de la fonction g définie par $g(x) = x \ln\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) En déduire une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[2 ; 2e]$.

c) Déterminer la valeur exacte de l'aire S et en déduire une valeur approchée du volume V de la cuve au m^3 près.

Partie B

Pour tout réel x compris entre 2 et $2e$, on note $v(x)$ le volume d'eau, exprimé en m^3 , se trouvant dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est égale à $f(x)$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2 ; 2e]$,

$$v(x) = 5 \left[\frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{x}{2}\right) - 2x \ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x^2}{4} + 2x - 3 \right].$$

1) Quel volume d'eau, au m^3 près, y a-t-il dans la cuve lorsque la hauteur d'eau dans la cuve est de un mètre ?

2) On rappelle que V est le volume total de la cuve, f est la fonction définie en début d'exercice et v la fonction définie dans la partie B.

On considère l'algorithme ci-contre.
Interpréter le résultat que cet algorithme permet d'afficher.

Variables :	a est un réel b est un réel
Traitement :	a prend la valeur 2 b prend la valeur $2e$ Tant que $v(b) - v(a) > 10^{-3}$ faire : c prend la valeur $(a + b)/2$ Si $v(c) < V/2$, alors : a prend la valeur c Sinon b prend la valeur c Fin Si Fin Tant que
Sortie :	Afficher $f(c)$