Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ON S'AMUSE ... 3

CORRECTION

1. Calculons $I + J$:

Ici: $I + J = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^2(x)\,dx + \int_0^{\pi/2} x^2 \sin^2(x)\,dx$

$= \int_0^{\pi/2} x^2 \left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right) dx$

$= \int_0^{\pi/2} x^2\,dx$ (car: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$).

Soit $f(x) = x^2$. f est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Elle admet donc des primitives sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent $I + J$ **existe**.

$$I + J = \int_0^{\pi/2} x^2\,dx \iff I + J = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi/2}$$

$$\iff I + J = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}$$

cad: $I + J = \frac{\pi^3}{24}$.

Ainsi: $I + J = \frac{\pi^3}{24}$.

2. **Déduisons-en I et J sachant que $I - J = \frac{\pi}{4}$:**

Pour déterminer I et J, nous devons résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi^3}{24} \\ I - J = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \quad (I).$$

$$(I) \iff \begin{cases} 2I = \dfrac{\pi^3}{24} + \dfrac{\pi}{4} \\ I - J = \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8} \\ I - J = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

cad: $$\begin{cases} I = \dfrac{\pi^3}{48} + \dfrac{\pi}{8} \\ J = \dfrac{\pi^3}{48} - \dfrac{\pi}{8} \end{cases}.$$

Ainsi: $I = \frac{\pi^3}{48} + \frac{\pi}{8}$ et $J = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8}$.