

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons l'intégrale I:

Ici: $I = \int_3^6 e^x (e^x + 3) dx.$

Soit $f(x) = e^x (e^x + 3)$. f est continue sur $[3; 6]$. Elle admet donc des primitives sur $[3; 6]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_3^6 e^x (e^x + 3) dx \Leftrightarrow I = \int_3^6 (e^{2x} + 3e^x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[\frac{1}{2} e^{2x} + 3e^x \right]_3^6$$

$$\Leftrightarrow I = \left(\frac{1}{2} e^{2 \times 6} + 3e^6 \right) - \left(\frac{1}{2} e^{2 \times 3} + 3e^3 \right)$$

$$\text{cad: } I = \frac{1}{2} e^{12} + \frac{5}{2} e^6 - 3e^3.$$

$$\text{Ainsi: } I = \frac{1}{2} e^{12} + \frac{5}{2} e^6 - 3e^3.$$

2. Calculons l'intégrale J:

Ici: $J = \int_{-1}^3 x |x| dx.$

Soit $f(x) = x|x|$. f est continue sur $[-1; 3]$. Elle admet donc des primitives sur $[-1; 3]$ et par conséquent J existe.

Notons que: • $f(x) = x \times (-x)$ si $x \in [-1; 0]$ ($|x| = -x$)

• $f(x) = x \times x$ si $x \in [0; 3]$ ($|x| = x$).

Dans ces conditions: $J = \int_{-1}^0 x \times (-x) dx + \int_0^3 x \times x dx$

$$\Leftrightarrow J = \int_{-1}^0 -x^2 dx + \int_0^3 x^2 dx$$

$$\Leftrightarrow J = \left[\frac{-x^3}{3} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3$$

$$\Leftrightarrow J = \left(\left(\frac{-(0)^3}{3} \right) - \left(\frac{-(-1)^3}{3} \right) \right) + \left(\left(\frac{(3)^3}{3} \right) - \left(\frac{(0)^3}{3} \right) \right)$$

cad: $J = \frac{26}{3}.$

Ainsi: $J = \frac{26}{3}.$

3. Calculons l'intégrale K:

Ici: $K = \int_2^0 \sqrt{|1-x|} dx \Leftrightarrow K = -\int_0^2 \sqrt{|1-x|} dx.$

Soit $f(x) = -\sqrt{|1-x|}$. f est continue sur $[0; 2]$. Elle admet donc des primitives sur $[0; 2]$ et par conséquent K existe.

- Notons que:
- $f(x) = -\sqrt{1-x}$ si $x \in [0; 1]$ ($|1-x| = 1-x$)
 - $f(x) = -\sqrt{-1+x}$ si $x \in [1; 2]$ ($|1-x| = -1+x$).

Dans ces conditions:
$$K = -\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx + \left(-\int_1^2 \sqrt{-1+x} \, dx \right)$$

$$\Leftrightarrow K = -\left[\frac{-2}{3} (1-x)^{3/2} \right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} (x-1)^{3/2} \right]_1^2$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{2}{3} \left((1-1)^{3/2} - (1-0)^{3/2} \right) - \frac{2}{3} \left((2-1)^{3/2} - (1-1)^{3/2} \right)$$

cad:
$$K = -\frac{4}{3}.$$

Ainsi:
$$K = -\frac{4}{3}.$$