

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE INTÉGRALE !

15

CORRECTION

1. Calculons la dérivée de $g(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ sur $[3; 4]$:

$$\text{Ici: } g(x) = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow g(x) = (x^2 + 2)^{1/2}.$$

La fonction g est dérivable sur $[3; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $[3; 4]$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [3; 4]: \quad g'(x) &= \frac{1}{2} x (x^2 + 2)^{-1/2} \times (2x) \\ &= x \times (x^2 + 2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\text{cad: } g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

$$\text{Ainsi pour tout } x \in [3; 4]: \quad g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}.$$

2. Déduisons-en la dérivée de la fonction $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 2})$ sur $[3; 4]$:

La fonction h est dérivable sur $[3; 4]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $[3; 4]$.

$$\begin{aligned}
 \text{Pour tout } x \in [3; 4]: \quad h'(x) &= \frac{(x + \sqrt{x^2 + 2})'}{(x + \sqrt{x^2 + 2})} \quad \left(\frac{u'}{u} \right) \\
 &= \frac{1 + g'(x)}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \\
 &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2 + 2} + x}{\sqrt{x^2 + 2} \times (x + \sqrt{x^2 + 2})}
 \end{aligned}$$

$$\text{cad: } h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$\text{Ainsi pour tout } x \in [3; 4]: \quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

3. Déduisons-en alors I:

$$\text{Ici: } I = \int_3^4 \frac{7}{\sqrt{x^2 + 1}} dx.$$

Soit $f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^2 + 1}}$. f est continue sur $[3; 4]$. Elle admet donc des primitives

sur $[3; 4]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_3^4 \frac{7}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \iff I = 7 \times \int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

$$\iff I = 7 \times \int_3^4 h'(x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = 7 \times [h(x)]_3^4$$

$$\Leftrightarrow I = 7 \times [\ln(x + \sqrt{x^2 + 2})]_3^4$$

$$\text{cad: } I = 7 \times (\ln(4 + \sqrt{18}) - \ln(3 + \sqrt{11})).$$

$$\text{Ainsi: } I = 7 \times (\ln(4 + \sqrt{18}) - \ln(3 + \sqrt{11})).$$