Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE INTÉGRALE ! 14

CORRECTION

1. Calculons g' sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

La fonction g est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Dans ces conditions, nous pouvons calculer sa dérivée sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $g'(x) = 0 + 2\cos x$.

cad: $g'(x) = 2\cos x$.

Ainsi pour tout $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$: $g'(x) = 2\cos x$.

2. Déduisons-en la valeur de I:

Ici: $I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2\sin x}\right) dx$.

Soit $f(x) = \frac{\cos x}{1 + 2\sin x}$. f est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Elle admet donc des primitives sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et par conséquent I existe.

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \right) dx \iff I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2\cos x}{1 + 2\sin x} \right) dx$$

$$\iff I = \frac{1}{2} \times \int_0^{\pi/2} \frac{g'(x)}{g(x)} dx$$

$$\iff I = \frac{1}{2} \times \Big[\ln(g(x)) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$\iff I = \frac{1}{2} \times \Big[\ln(1 + 2\sin x) \Big]_0^{\pi/2}$$

$$\iff I = \frac{1}{2} \times \left(\ln\left(1 + 2\sin \frac{\pi}{2} \right) - \ln(1 + 2\sin 0) \right)$$

cad: $I = \frac{1}{2} \times (\ln(3) - 0)$.

Ainsi: $I = \frac{\ln(3)}{2}$.

3. a. Montrons que $I + J = 1$:

$$I + J = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x}{1 + 2\sin x} \right) dx + \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2x)}{1 + 2\sin x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2\sin x} \right) dx.$$

Or: $\sin(2x) = 2\sin x \times \cos x$.

Dans ces conditions: $\frac{\cos x + \sin(2x)}{1 + 2\sin x} = \frac{\cos x + 2\sin x \times \cos x}{1 + 2\sin x}$

$$= \frac{\cos x\,(1 + 2\sin x)}{1 + 2\sin x}$$

$$= \cos x.$$

D'où: $I + J = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$

$= \left[\sin x \right]_0^{\pi/2}$ cad: $I + J = 1.$

Ainsi, nous avons bien: $I + J = 1.$

3. b. Déduisons-en la valeur de J:

Comme $I + J = 1$ et $I = \frac{\ln(3)}{2}$, nous pouvons affirmer que:

$$J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$$

Ainsi: $J = 1 - \frac{\ln(3)}{2}.$