Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

UNE INTÉGRALE ! 13

CORRECTION

1. Calculons I_1:

Ici: $I_1 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. f est continue sur [2 ; 4]. Elle admet donc des primitives sur [2 ; 4] et par conséquent I_1 **existe**.

$$I_1 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2}\,dx \iff I_1 = \frac{1}{2} \times \int_2^4 \left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$$

$$\iff I_1 = \frac{1}{2} \times \int_2^4 \frac{U'(x)}{U(x)}\,dx, \text{ avec: } U(x) = 1 + x^2$$

$$\iff I_1 = \frac{1}{2} \times \Big[\ln\left(U(x)\right)\Big]_2^4$$

$$\iff I_1 = \frac{1}{2} \times \Big[\ln\left(1+x^2\right)\Big]_2^4$$

cad: $I_1 = \frac{1}{2} \times (\ln(17) - \ln(5))$.

Ainsi: $I_1 = \frac{1}{2} \times (\ln(17) - \ln(5))$ **ou** $I_1 = \frac{1}{2} \times \ln\left(\frac{17}{5}\right)$.

2. Déduisons-en I_2 après avoir donné la valeur de $I_1 + I_2$:

$$I_1 + I_2 = \int_2^4 \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int_2^4 \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$$

$<=>$ $I_1 + I_2 = \int_2^4 \frac{x+x^3}{1+x^2}\,dx$ **cad** $I_1 + I_2 = \int_2^4 x\,dx$.

Soit $\mathbf{h(x) = x}$. h est continue sur $[2\,;\,4]$. Elle admet donc des primitives sur $[2\,;\,4]$ et par conséquent **$I_1 + I_2$ existe**.

$I_1 + I_2 = \int_2^4 x\,dx$ $<=>$ $I_1 + I_2 = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^4$

cad: $I_1 + I_2 = 6$.

Ainsi: $I_1 + I_2 = 6$.

Et donc: $I_2 = 6 - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{17}{5}\right)$.