

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CALCUL DE LA DÉRIVÉE D'UNE INTÉGRALE ?

2

CORRECTION

Calculons $F'(x)$ sur $]0; +\infty[$:

$$\text{Ici: } F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t) dt.$$

• Soit $f(t) = \ln(t)$. f est continue sur $]0; +\infty[$. Elle admet donc des primitives

sur $]0; +\infty[$ et par conséquent: $\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t) dt$ existe.

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \ln(t) dt \Leftrightarrow F(x) = \left[t \times \ln(t) - t \right]_{\sqrt{x}}^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = (x^2 \times \ln(x^2) - x^2) - (\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - \sqrt{x})$$

$$\text{cad: } F(x) = 2x^2 \ln(x) - x^2 - \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln(x) + \sqrt{x}$$

$$= (2x^2 - \frac{1}{2} \sqrt{x}) \times \ln(x) + (-x^2 + \sqrt{x}).$$

• Soit $F(x) = (2x^2 - \frac{1}{2} \sqrt{x}) \times \ln(x) + (-x^2 + \sqrt{x})$. F est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in]0; +\infty [$, nous pouvons calculer F' .

Pour tout $x \in]0; +\infty [$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)) + \left(2x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right) + \left(-2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)) + \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \left(-2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)). \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction F sur l'intervalle $]0; +\infty [$ est:

$$F'(x) = \left(4x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right) \times (\ln(x)).$$