Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

I_1, I_0, I_{n+1}, I_n ...

CORRECTION

1. a. Calculons I_1:

Ici: $I_1 = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx.$

Soit $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$. f est continue sur $[0; 1]$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $[0; 1]$ et par conséquent I_1 **existe**.

$$I_1 = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx \iff I_1 = \int_0^1 \frac{U'(x)}{U(x)} dx, \text{ avec: } U(x) = e^x + 1$$

$$\iff I_1 = \Big[\ln(U(x))\Big]_0^1$$

$$\iff I_1 = \Big[\ln(e^x + 1)\Big]_0^1$$

cad: $I_1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$.

Ainsi: $I_1 = \ln(e + 1) - \ln(2)$ ou $I_1 = \ln\left(\frac{e + 1}{2}\right)$.

1. b. Calculons $I_0 + I_1$:

Ici: $I_0 + I_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x + 1}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right) dx$

$$= \int_0^1 1\, dx.$$

Soit $g(x) = 1$. g est continue sur $[0; 1]$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $[0; 1]$ et par conséquent $I_0 + I_1$ existe.

$I_0 + I_1 = \int_0^1 1\, dx \iff I_0 + I_1 = [x]_0^1$

cad: $I_0 + I_1 = 1.$

Ainsi: $I_0 + I_1 = 1.$

2. Déduisons-en I_0:

Nous savons que: $I_0 + I_1 = 1$ et $I_1 = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$

Dans ces conditions: $I_0 = 1 - I_1$ cad: $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$

Ainsi: $I_0 = 1 - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right).$

3. Déterminons $I_{n+1} + I_n$:

Ici: $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \left(\frac{e^{(n+1)x}}{e^x + 1}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{e^{nx}}{e^x + 1}\right) dx$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{(n+1)x} + e^{nx}}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(e^x + 1) \times e^{nx}}{e^x + 1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 e^{nx} \, dx.$$

Soit $h(x) = e^{nx}$. h est continue sur $[0; 1]$. Elle admet donc des primitives sur l'intervalle $[0; 1]$ et par conséquent $I_{n+1} + I_n$ **existe**.

$$I_{n+1} + I_n = \int_0^1 e^{nx} \, dx \iff I_{n+1} + I_n = \left[\frac{e^{nx}}{n} \right]_0^1$$

cad: $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n} \times (e^n - 1).$

Ainsi: $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n} \times (e^n - 1).$

4. Déduisons-en I_2 et I_3:

D'après la question précédente, nous savons que pour tout réel x et tout entier naturel n:

$$I_{n+1} = \frac{1}{n} \times (e^n - 1) - I_n.$$

Dans ces conditions:

- $I_2 = \dfrac{1}{1} \times (e^1 - 1) - I_1$
- $I_3 = \dfrac{1}{2} \times (e^2 - 1) - I_2$

cad: • $I_2 = (e - 1) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

• $I_3 = \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) - (e - 1) + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

Au total: • $I_2 = (e - 1) - \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$

• $I_3 = \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) - (e - 1) + \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.