

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que $I_1 = e - 2$:

$$\text{Ici: } I_1 = \int_0^1 x e^{1-x} dx, \text{ car } I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

$$\text{D'où: } I_1 = [(-1-x) e^{1-x}]_0^1, \text{ d'après l'énoncé}$$

$$= -2 \times e^0 - (-1 \times e^1)$$

$$= e - 2.$$

Au total, nous avons bien: $I_1 = e - 2$.

2. Calculons I_2 :

$$\text{D'après l'énoncé: } I_{n+1} = (n+1) I_n - 1.$$

$$\text{Dans ces conditions: } I_2 = (1+1) I_1 - 1 \text{ cad } I_2 = 2e - 5.$$

$$\text{Ainsi: } I_2 = 2e - 5.$$

3. Justifions que pour tout réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$:

Pour tout réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1 \leq -x \leq -0$$

$$\Leftrightarrow 1-1 \leq 1-x \leq 1-0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1$$

(car la fonction exponentielle est croissante)

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{1-x} \leq e \quad (1).$$

En multipliant chaque membre de (1) par x^n qui est positif sur $[0; 1]$,

nous obtenons: $(1) \Leftrightarrow x^n \times 1 \leq x^n \times e^{1-x} \leq x^n \times e$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e, \text{ car: } x^n \geq 0 \text{ sur } [0; 1]$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e.$$

Au total, pour réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$.

4. Démontrons que $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$:

Soit h , la fonction définie sur $[0; 1]$ par: $h(x) = x^n e$.

La fonction h est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$

et par conséquent: $\int_0^1 h(x) \, dx$ existe.

$$\begin{aligned}
 \text{Ici: } \int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 x^n e dx \\
 &= e x \int_0^1 x^n dx \\
 &= e x \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{e}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien: $\int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}$.

5. Dédisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} dx \leq \frac{e}{n+1}$:

Pour tout réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g(x) = 0$,
- $f(x) = x e^{1-x}$,
- $h(x) = x^n e$.

Notons que:

- les fonctions g , f et h sont continues sur $[0; 1]$,
- elles admettent donc des primitives sur $[0; 1]$, et par conséquent:

$$\int_0^1 g(x) dx, \int_0^1 f(x) dx \text{ et } \int_0^1 h(x) dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $[0; 1]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n e$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 g(x) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n e dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{e}{n+1}$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \frac{e}{n+1}$.