

www.freemaths.fr

Spé Maths

Terminale

Calcul d'intégrales



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Montrons que $I_0 = \ln(2)$:

D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx$.

Dans ces conditions: $I_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx$.

Soit h , la fonction définie sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ par: $h(x) = \frac{1}{1-x}$.

La fonction h est continue sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ (avec $1-x \neq 0$), elle admet donc des

primitives sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et par conséquent: I_0 existe.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } I_0 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx \\ &= - \left[\ln(1-x) \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= - \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(1) \right) \end{aligned}$$

$$= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ou } I_0 = \ln(2).$$

Donc nous avons bien: $I_0 = \ln(2)$.

2. a. Calculons $I_0 - I_1$:

$$\begin{aligned} I_0 - I_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x}{1-x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx \\ &= \left[x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Au total: $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$.

2. b. Déduisons-en I_1 :

Nous savons que: • $I_0 = \ln(2)$

• $I_0 - I_1 = \frac{1}{2}$

D'où: $I_1 = I_0 - \frac{1}{2}$ cad $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

Ainsi: $I_1 = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}$:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{1-x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{1-x} \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n x (1-x)}{(1-x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\frac{1}{2}} \quad \text{cad} \quad I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

Au total, nous avons bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$I_n - I_{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}.$$

4. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x} dx \leq \frac{1}{2^n}$:

Pour tout réel $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g(x) = 0$,

- $f(x) = \frac{x^n}{1-x}$,

- $h(x) = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Notons que: • les fonctions g , f et h sont continues sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$,

- elles admettent donc des primitives sur $\left[0; \frac{l}{2}\right]$, et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} g(x) dx, \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx \text{ et } \int_0^{\frac{l}{2}} h(x) dx \text{ existent,}$$

- de plus, les fonctions g , f et h sont positives sur $\left[0; \frac{l}{2}\right]$,
- enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leq \frac{x^n}{1-x} \leq \frac{l}{2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{l}{2}} g(x) dx \leq \int_0^{\frac{l}{2}} f(x) dx \leq \int_0^{\frac{l}{2}} h(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} \right) dx \leq \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{l}{2^{n-1}} \right) dx$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} \right) dx \leq \left[\left(\frac{l}{2} \right)^{n-1} x \right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} \right) dx \leq \left(\frac{l}{2} \right)^n.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leq \int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{x^n}{1-x} \right) dx \leq \frac{l}{2^n}$.