Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 7

CORRECTION

1. Justifions que pour tout réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$:

Pour tout réel $x \in [\,0\,;\,1\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbf{0 \leqslant x \leqslant 1}$

<=> $-1 \leqslant -x \leqslant -0$

<=> $1 - 1 \leqslant 1 - x \leqslant 1 - 0$

<=> $0 \leqslant 1 - x \leqslant 1$

<=> $e^0 \leqslant e^{1-x} \leqslant e^1$

(car la fonction exponentielle est croissante)

<=> $1 \leqslant e^{1-x} \leqslant e$ (1).

En multipliant chaque membre de (1) par x^n qui est positif sur $[\,0\,;\,1\,]$,

nous obtenons: (1) <=> $x^n \times 1 \leqslant x^n \times e^{1-x} \leqslant x^n \times e$

<=> $0 \leqslant x^n \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$, car: $x^n \geqslant 0$ sur $[\,0\,;\,1\,]$

<=> $0 \leqslant x^n\, e^{1-x} \leqslant x^n\, e$.

Au total, pour réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$.

2. Montrons que $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$:

Soit h, la fonction définie sur $[0; 1]$ par: $h(x) = x^n e$.

La fonction h est continue sur $[0; 1]$, elle admet donc des primitives sur $[0; 1]$

et par conséquent: $\int_0^1 h(x)\, dx$ existe.

Ici: $\int_0^1 h(x)\, dx = \int_0^1 x^n e \, dx$

$$= e \times \int_0^1 x^n \, dx$$

$$= e \times \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{e}{n+1}.$$

Au total, nous avons bien: $\int_0^1 x^n e \, dx = \frac{e}{n+1}$.

3. Déduisons-en que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leqslant \frac{e}{n+1}$:

Pour tout réel $x \in [0; 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons:

- $g(x) = 0$,
- $f(x) = x\, e^{1-x}$,
- $h(x) = x^n e$.

Notons que: • les fonctions g, f et h sont continues sur $[0; 1]$,

• elles admettent donc des primitives sur $[0; 1]$, et par conséquent:

$$\int_0^1 g(x)\,dx,\ \int_0^1 f(x)\,dx \text{ et } \int_0^1 h(x)\,dx \text{ existent,}$$

• de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $[0; 1]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant x^n e$$

$$\iff g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\iff \int_0^1 g(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 h(x)\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \int_0^1 x^n e\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \frac{e}{n+1}.$$

Au total, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx \leqslant \dfrac{e}{n+1}.$