Spé Maths
Terminale

Calcul d'intégrales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ENCADREMENT 6

CORRECTION

1. Montrons que pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant x^2 \sin(x) \leqslant x^2$:

Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons: $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$\iff \sin(0) \leqslant \sin(x) \leqslant \sin\frac{\pi}{2}$

$\iff 0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

$\iff 0 \times x^2 \leqslant x^2 \times \sin(x) \leqslant 1 \times x^2$

$\left(x^2 \geqslant 0, \text{ pour tout } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \right)$

$\iff 0 \leqslant x^2 \sin(x) \leqslant x^2.$

Ainsi, pour tout réel $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, nous avons bien: $0 \leqslant x^2 \sin(x) \leqslant x^2.$

2. Déduisons-en que $0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x) \leqslant \frac{\pi^3}{24}$:

Posons pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: • $g(x) = 0$,

• $f(x) = x^2 \sin(x)$,

• $h(x) = x^2$.

Notons que: • les fonctions g, f et h sont continues sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

• elles admettent donc des primitives sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, et par conséquent:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,dx \text{ existent,}$$

• de plus, les fonctions g, f et h sont positives sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$,

• enfin, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

Les conditions étant réunies, nous pouvons écrire:

$$0 \leqslant x^2 \sin(x) \leqslant x^2$$

$$\iff g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

$$\iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)\,dx$$

$$\iff \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \times dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,dx \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx$$

$$\iff 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\,dx \leqslant \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx \leqslant \frac{\pi^3}{24}.$$

Au total un encadrement de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ est:

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx \leqslant \frac{\pi^3}{24}.$$